TD – EDO – Problèmes raides

▷ **Exercice 1.** On considère l'équation différentielle linéaire suivante

$$(IVP)\left\{\begin{array}{l}\dot{y}(t)=\lambda y(t)\\ y(t_0)=y_0,\end{array}\right.$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) < 0$ et $y(t) \in \mathbb{C}$. On notera $h = (t_f - t_0)/N$, le pas supposé constant et on notera $z = \lambda h$.

1.1.

1. On considère le schéma d'Euler explicite. Montrer que l'on peut écrire

$$y_N = R(z)^N y_0.$$

On exprimera $R(z)$ en fonction de z.

2. On suppose ici que $z \in \mathbb{C}$, visualiser dans le plan complexe l'ensemble $|R(z)| \leq 1$.

1.2. On considère le schéma d'Euler implicite.

1. Montrer que l'on peut écrire pour $z \neq 1$

$$y_N = R(z)^N y_0.$$

On exprimera $R(z)$ en fonction de z.

2. On suppose ici que $z \in \mathbb{C}$, visualiser dans le plan complexe l'ensemble $|R(z)| \leq 1$.

1.3. On considère un schéma de Runge-Kutta à s étages défini par le tableau de Butcher 1. Montrer que l'on peut écrire, sauf pour quelques valeurs de z,

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

TABLE 1 – *Tableau de Butcher.*

$$y_N = R(z)^N y_0.$$

On exprimera $R(z)$ en fonction de z, A, b et du vecteur $\mathbf{1}$ (le vecteur colonne qui ne contient que des 1).

1.4.

1. Pourquoi désire-t-on pour une méthode numérique de Runge-Kutta avoir $\{z, |R(z)| \leq 1\} \subset \mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C}, Re(z) \leq 0\}$?
2. Commentaires sur les méthodes d'Euler expicite et implicite.

▷ **Exercice 2.** On considère l'exemple

$$(IVP)_1 \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = -50y(t) \\ y(0) = 10 \end{array} \right.$$

avec $[t_0 \;\; t_f] = [0 \;\; 1.5]$ et l'exemple de Curtiss & Hirschfelder

$$(IVP)_2 \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = -50(y(t) - \cos(t)) \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$$

avec $[t_0 \;\; t_f] = [0 \;\; 1.5]$.

Expliquer le comportement vu en TP sur cet exemple.