Chapitre 6

Formules intégrales

6.1 Intégrales curvilignes

Soit $\gamma : t \longmapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une courbe paramétrée régulière de l'espace $\mathbb{R}^3$ et $\vec{V} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ un champ de vecteurs.

6.1.1 Définition

On appelle intégrale curviligne de $\vec{V}$ le long de γ, l'intégrale :

$$\int_\gamma \vec{V}\cdot\vec{\gamma}'\,dt = \int_a^b \Big[P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) \quad + \quad Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) \\ \quad + \quad R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\Big]\,dt$$

Exemple

Calculer l'intégrale curviligne donnant la circulation du vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ le long du cercle C de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Le cercle C sera paramétrisé par :

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Par définition, on pose

$$\begin{aligned} I &= \int_C \vec{V}\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \Big(\big(\cos t - \sin t\big)(-\sin t) + \big(\cos t - \sin t\big)\cos t\Big)\,dt \\ I &= \int_0^{2\pi} \big(1 - 2\sin t\cos t\big)\,dt = 2\pi \end{aligned}$$

6.1.2 Théorème : Travail d'un champ de gradient

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, et soit $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ son champ de gradient. Soit γ une courbe différentiable de $\mathbb{R}^3$, contenue dans U et d'origine A et d'extrémité B. Alors on a :

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot \vec{\gamma'}\, dt = f(B) - f(A)$$

On dit que le travail d'un champ de gradient ne dépend que des extrémités de la courbe.

preuve
Il suffit de voir que la primitive de l'expression

$$\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) \quad + \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\Big]$$

est exactement la fonction :

$$t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$$

■

6.1.3 Théorème : Formule de Green-Riemann

Si γ est une courbe plane fermée de classe C^1 par morceaux délimitant un domaine compact simple D du plan, alors on a la formule de Green-Riemann :

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot \vec{\gamma'}\, dt = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

où la courbe γ est parcourue en laissant le dommaine constamment à sa gauche.

Cette formule est un cas particulier de la formule du paragraphe suivant.

Exemple

Calculer l'intégrale curviligne donnant la circulation du vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} x^3 - y^3 \\ x^3 + y^3 \end{pmatrix}$ le long du cercle C de centre $(0,0)$ et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique.

La formule de Green-Riemann donne l'intégrale double sur le disque D d'équation : $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$I = \iint_D (3x^2 + 3y^2)\; dxdy$$

On peut intégrer en passant en coordonnées polaires :

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} 3\rho^2 \rho\; d\rho\, d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

Une application au calcul d'aire plane

Si γ est une courbe plane fermée de classe C^1 par morceaux délimitant un domaine compact simple D du plan, alors l'aire de D peut se calculer par :

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D dxdy = \int_\gamma x(t)y'(t)dt = \int_\gamma -y(t)x'(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_\gamma (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt \end{aligned}$$

Exemple

Calculer l'aire de l'ellipse d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

On paramétrise l'ellipse par :

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Puis on applique la formule :

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dxdy = \int_\gamma x(t)\, y'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a\cos t\ b\cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} (ab\cos^2 t)\, dt \\ &= \pi\, a\, b \end{aligned}$$

6.2 Intégrales de surfaces

Soit Σ une surface régulière paramétrée de l'espace $\mathbb{R}^3$ de paramétrisation :

$$\begin{aligned} \sigma : D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto \Big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\Big) \end{aligned}$$

Soit $\phi(x,y,z)$ un champ scalaire de l'espace.

6.2.1 Définition : Intégrale de surface

On appelle Intégrale de ϕ sur la surface Σ, l'intégrale :

$$\iint_\Sigma \phi\ d\sigma \quad = \quad \iint_D \phi(\sigma(u,v))||\vec{N}||\ dudv$$

où $\vec{N}$ est le vecteur normal associé à la paramétrisation.

Remarque

La quantité $||\vec{N}||dudv$ est appelée "élément de surface" et notée $d\sigma$.

Exemple

Calculer l'aire du tronc de cône $\Sigma \ : \ x^2 + y^2 = z^2 \quad 0 \leq a \leq z \leq b$.

On a juste à calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_\Sigma d\sigma$, où le tronc de cône Σ sera paramétrisé par :

$$\sigma(t) : \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = r \\ a \leq r \leq b \ ; \ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Le vecteur normal $\vec{N}$ se calcule par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \\ \sin t \\ \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin t \\ \\ r\cos t \\ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos t \\ \\ -r\sin t \\ \\ r \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma d\sigma &= \iint_\Sigma ||\vec{N}||drdt = \int_a^b \int_0^{2\pi} \sqrt{2r^2}drdt \\ &= \sqrt{2}\,\pi(b^2 - a^2) = \pi\sqrt{2}(b-a)(b+a) \end{aligned}$$

On pourra remarquer que le résultat correspond à la formule

$$A = \pi\,(R + r)\,\frac{h}{\cos\alpha}$$

où R et r sont les rayons des bases du tronc de cône, h sa hauteur et α son demi-angle au sommet.

6.2.2 Définition : Flux d'un champ de vecteurs

Soit $\vec{V} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ un champ de vecteurs.
On appelle Flux de $\vec{V}$ à travers la surface Σ l'intégrale :

$$\iint_\Sigma (\vec{V} \cdot \vec{n})\ d\sigma \quad = \quad \iint_D \vec{V} \cdot \vec{N}\ dudv$$

où $\vec{N}$ est le vecteur normal associé à la paramétrisation et $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{||\vec{N}||}$.

Exemple

Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z)$ sortant à travers la demi-sphère Σ d'équation $z \geq 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

On paramétrise la demi sphère par

$$\sigma(u, v) : \begin{cases} x = \cos u \sin v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos v \\ u \in [0, 2\pi] \ ; \ v \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Le vecteur normal sortant se calcule par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \, \cos v \\ \\ \sin u \, \cos v \\ \\ -\sin v \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin u \, \sin v \\ \\ \cos u \, \sin v \\ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \, \sin^2 v \\ \\ \sin u \, \sin^2 v \\ \\ \sin v \, \cos v \end{pmatrix}$$

On obtient pour le flux :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \sin v \ dudv = \int_0^{2\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v \, dv = 2\pi$$

6.3 Théorème : Formule de Stockes-Ampère

Si on désigne par $\partial\Sigma$ le bord orienté de la surface Σ de paramétrisation $\gamma : t \longmapsto \gamma(t)$ alors on a la formule dite de Stockes-Ampère :

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{\gamma'} \ dt = \iint_{\Sigma} (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V} \cdot \vec{N}) \ dudv$$

Cette formule dit que la circulation d'un champ de vecteurs $\vec{V}$ le long du bord orienté d'une surface Σ est égale au flux du rotationnel de $\vec{V}$ à travers cette surface Σ.

Exemple

Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x, -y, 2)$ sortant à travers la demi-sphère Σ d'équation $z \geq 0$ et $x^2+y^2+z^2 = 1$ en utilisant une intégrale curviligne.

Posons $\vec{U} = (-y, x, xy)$. Alors on peut vérifier (exercice) que

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U} = \vec{V}$$

On peut donc écrire

$$\iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{N} \ dudv = \int_C \vec{U} \cdot \gamma'(t) dt$$

où C est le cercle de rayon 1 délimitant la demi-sphère et paramétrisé par :

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases} \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule alors l'intégrale

$$\phi = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Remarque : essayez de retrouver ce résultat en utilisant la définition du flux.

6.4 Théorème : Formule de Green-Ostrogradsky

Soit K un domaine fermé et borné de $\mathbb{R}^3$ et limité par une surface orientée Σ qui est précisément le bord orienté de K : $\partial K = \Sigma$.
Soit $\vec{V}$ un champ vectoriel de classe C^1 sur K.
On a la formule dite d'Ostrogradsky :

$$\iint_\Sigma (\vec{V} \cdot \vec{n})\ d\sigma = \iiint_K \operatorname{Div} \vec{V}\ dxdydz$$

Cette formule dit que le flux de $\vec{V}$ sortant à travers la survace fermée Σ est égal à la l'intégrale de la divergence de $\vec{V}$ dans le volume délimité par la surface.

Exemple

Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x^3, y^3, z^3)$ sortant à travers la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en passant par le calcul d'une intégrale triple.

On calcule d'abord

$$\operatorname{Div} \vec{V} = \frac{\partial\, x^3}{\partial x} + \frac{\partial\, y^3}{\partial y} + \frac{\partial\, z^3}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Puis on calcule l'intégrale

$$\phi = \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2)\ dxdydz$$

sur la boule V d'équation $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. En passant en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r\ \sin\varphi\ \cos\theta \\ y = r\ \sin\varphi\ \sin\theta \\ z = r\ \cos\varphi \\ r \in [0, 1]\ ;\ \ \theta \in [0, 2\pi]\ ;\ \ \varphi \in [0, \pi]. \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\phi &= \iiint_V 3r^2\, r^2 \sin\varphi \; dr\, d\theta\, d\varphi \\
\phi &= \int_0^1 3r^4\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{12}{5}\pi
\end{aligned}$$