TD 1 – EDO

▷ **Exercice 1.** On considère l'équation différentielle

$$(IVP)\begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + \sin t\\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 3x_2(t)\\ x_1(0) = -9/25, x_2(0) = -4/25.\end{cases}$$

1.1. Écrite la fonction f permettant d'écrire le système différentiel $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

1.2. Écrire $f(s, y) = Ay + b(s)$. On donnera A, matrice $(2, 2)$ et la fonction b.

▷ **Exercice 2** (Modèle de Lorenz (effet papillon))**.** On considère l'équation différentielle

$$(IVP)\begin{cases}\dot{x}_1(t) = -\sigma x_1(t) + \sigma x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t)x_3(t) + rx_1(t) - x_2(t)\\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t)\\ x_1(0) = -8, x_2(0) = 8, x_3(0) = r - 1,\end{cases}$$

avec $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$.

2.1. Écrite la fonction f permettant d'écrire le système différentiel $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

2.2. Peut-on écrire ici $f(s, y) = Ay$, A matrice constante ?

▷ **Exercice 3** (exemple de Roberston)**.** On considère la réaction chimique

$$\begin{array}{cccl} A & \xrightarrow{0.04} & B & \text{(lente)},\\ B+B & \xrightarrow{3.10^7} & C+B & \text{(très rapide)},\\ B+C & \xrightarrow{10^4} & A+C & \text{(rapide)}.\end{array}$$

Le système différentiel associé à cette réaction chimique est donnée par

$$(IVP)\begin{cases}\dot{x}_1(t) = & -0.04x_1(t) + 10^4x_2(t)x_3(t) & \\ \dot{x}_2(t) = & 0.04x_1(t) - 10^4x_2(t)x_3(t) & -3.10^7x_2^2(t)\\ \dot{x}_3(t) = & & 3.10^7x_2^2(t)\\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, & & \end{cases}$$

3.1. Écrite la fonction f permettant d'écrire le système différentiel $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

3.2. Peut-on écrire ici $f(s, y) = Ay$, A matrice constante ?

▷ **Exercice 4.** Vérifiez que la fonction

$$\begin{array}{rccc}\varphi\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ & t & \longmapsto & \begin{pmatrix}-\frac{1}{25}(13\sin t + 9\cos t)\\ -\frac{1}{25}(3\sin t + 4\cos t)\end{pmatrix}\end{array}$$

est solution du système différentiel à condition initiale de l'exercice **??**.

▷ **Exercice 5.** On considère le problème de Cauchy définie sur $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = -x^2(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où (t_0, x_0) est fixé. Vérifiez que l'on a les solutions :

— Si $x_0 = 0$,

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & I =]-\infty, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \varphi(t) = 0 \end{array}$$

— Si $x_0 > 0$,

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & I =]t_0 - 1/x_0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \varphi(t) = \frac{x_0}{(t-t_0)x_0+1}; \end{array}$$

— Si $x_0 < 0$,

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & I =]-\infty, t_0 - 1/x_0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \varphi(t) = \frac{x_0}{(t-t_0)x_0+1}. \end{array}$$

Ces résultats sont visualisés sur les figures **??** et **??**.

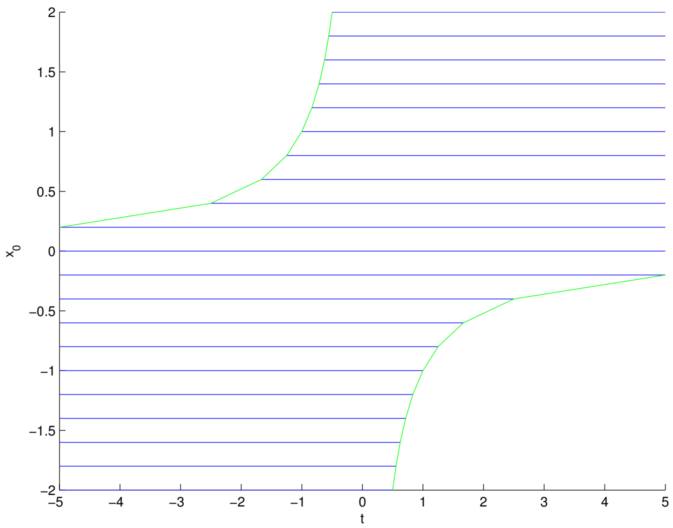

FIGURE 1 – *Visualisation de l'ensemble* $]\omega_-(0, x_0), \omega_+(0, x_0)[\times x_0$ *pour l'exemple* $\dot{x}(t) = -x^2(t), x(0) = x_0$.

▷ **Exercice 6.** Cet exercice a pour but de bien comprendre la définition de l'application T dans la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz. On considère pour cela le cas linéaire, sans terme constant et autonôme :

$$(IVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Donner les premiers itérés $x^{(k+1)} = T(x^{(k)})$ en partant de $x^{(0)}(t) = x_0$ pour tout t.

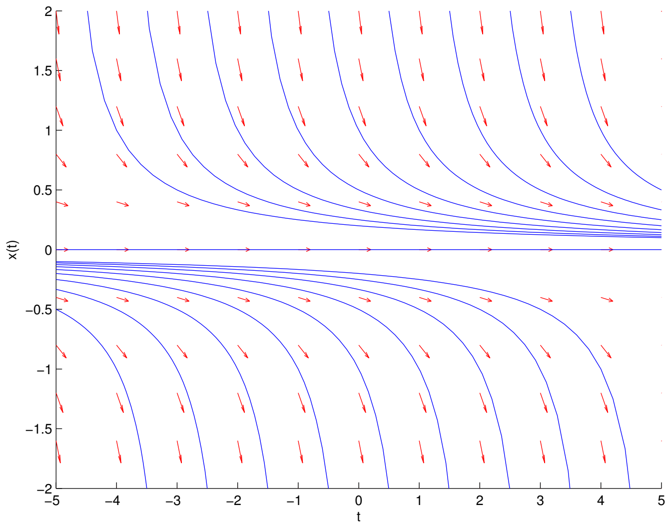

FIGURE 2 – *Solutions pour le problème* $\dot{x}(t) = -x^2(t), x(t_0) = x_0$*, les courbes intégrales ne peuvent se couper, elles forment une partition de l'ouvert* $\Omega = \mathbb{R}^2$*.*