TD 2 – EDO – Dérivée

▷ **Exercice 1.** Soit $x_0 > 0$ on considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} x\colon &]t_0 - 1/x_0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x_0) & \longmapsto & x(t, x_0) = \frac{x_0}{tx_0+1}, \end{array}$$

et le système de Cauchy suivant

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = -x^2(t) \\ x(0) = x_0. \end{array} \right.$$

1.1. Définissez et visualiser l'ensemble $\mathcal{O} = \{(t, x_0) \in \mathbb{R}^2, t \in]\omega_-(x_0), \omega_+(x_0)[\}$.

1.2. Vérifier que $x(t, x_0)$ est la solution de (IVP) et calculer

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0).$$

1.3. Donner l'équation variationnelle que doit vérifier

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(., x_0)$$

et vérifier que la dérivée partielle calculée à la question **1.2** est bien solution de ce système variationnel.

▷ **Exercice 2.**

2.1. On considère $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ et les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \alpha_1 I + \alpha_2 N.$$

Donner $e^{\alpha_1 t I}$ et $e^{\alpha_2 t N}$. En déduire l'expression de e^{tA}.

2.2. On considère maintenant le problème de Cauchy

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = \alpha_1 x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = \alpha_1 x_3(t) \\ x_1(0) = 1; x_2(0) = 2; x_3(0) = 3. \end{array} \right.$$

Donner, en fonction de α_1 et α_2 la solution de (IVP).

2.3. À partir de cette solution calculez

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}(t, \alpha).$$

2.4. Donner l'équation variationnelle dont est solution cette dérivée partielle

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}(t, \alpha).$$

On precisera les dimensions des vecteurs et matrices utilisées.

2.5. Donner les équations variationnelles dont sont solutions les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}(t, \alpha).$$

On precisera les dimensions des vecteurs et matrices utilisées.

2.6. Retrouver la solution des équations variationnelles ci-dessus à l'aide de la formule (2.11) du cours

▷ **Exercice 3.** On considère les équations de Lorenz

$$(IVP)\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\sigma x_1(t) + \sigma x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t)x_3(t) + rx_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t) \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0, \end{cases}$$

avec $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$. On note $\lambda = (\sigma, r, b)$ le vecteur des paramètres et $x(., \lambda)$ la solution du système de Cauchy (IVP).

3.1. Donner les dimensions de la matrice jacobienne associée à la dérivée partielle $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t_f, \lambda)$

3.2. écrire les Équations variationnelles permettant de calculer

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t_f, \lambda).$$