TD 2 – Convexité

▷ **Exercice 1.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

1.1. Montrer que toute application norme, définie sur E, est convexe sur E. Que dire de la *stricte* convexité ?

1.2. Soient f et g deux applications convexes sur C, convexe de E. Montrer que $\forall\lambda \geq 0$, $\forall\mu \geq 0$, $\lambda f + \mu g$ est une application convexe sur C.

1.3. Soient $(f_i)_{i\in I}, I$ fini une famille quelconque d'applications convexes sur C, convexe de E. Montrer que $f = \sup_{i\in I} f_i$ est une application convexe sur C.

▷ **Exercice 2.**

2.1. Pensez-vous qu'il existe des fonctions strictement convexes non croissantes à l'infini ?

2.2. Pensez-vous qu'il existe des fonctions strictement convexes vérifiant $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$?

▷ **Exercice 3.**

3.1. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ pour que f soit convexe sur $\mathbf{R}^2$.

3.2. L'application $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $g(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3|x_1 + x_2 + 3|$ est-elle convexe, voire strictement convexe, sur $\mathbf{R}^2$?

3.3. L'application $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $h(x) = e^{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ est-elle convexe, voire strictement convexe, sur $\mathbf{R}^n$?

▷ **Exercice 4.**

4.1. L'application $f : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $f(X) = \mathrm{tr}(X)$ est-elle convexe (voire strictement convexe) sur $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$?

4.2. Soit $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbf{R})$ et soit $g : \mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $g(X) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(XAX^T)$. Donner une condition suffisante portant sur A pour que g soit convexe sur $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$. Peut-on étendre le résultat pour obtenir la stricte convexité ?

▷ **Exercice 5.**

5.1. Soit $f : (\mathbf{R}_+^*)^2 \to \mathbf{R}$, $f(x) = x_1 \ln(x_1) + x_2 \ln(x_2) - (x_1 + x_2) \ln(x_1 + x_2)$. Montrer que f est convexe sur $(\mathbf{R}_+^*)^2$ et donner un sous-ensemble C de $(\mathbf{R}_+^*)^2$ sur lequel f soit strictement convexe.

5.2. Soit $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i x_i^2 + \sum_{i=1}^2 \beta_i x_i x_{i+1} + \gamma x_1 x_3 + \sum_{i=1}^3 x_i x_4 + \sum_{i=1}^4 b_i x_i$. Donner une condition suffisante sur les différents scalaires $(\alpha_i)_{i=1,4}$, $(\beta_i)_{i=1,2}$, et γ, pour que g soit convexe sur $\mathbf{R}^4$. Même question pour la stricte convexité.