Informatique & Mathématiques Appliquées
Programmation Mathématique et Application
Introduction

J. Gergaud & D. Ruiz

17 avril 2008

Introduction

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Un problème d'optimisation consiste à rechercher le meilleur élément de l'ensemble E, c'est-à-dire celui qui rend la valeur de f la plus petite possible.

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\min f(x)\\ x \in C \subset E.\end{array}\right.$$

- Il faut donc avoir une structure d'ordre sur E $(= \mathbf{R})$
- E s'appelle l'ensemble des stratégies, des états, des paramètres, l'espace
- C est l'ensemble des contraintes
- f est la fonction coût, économique ou le critère, l'objectif

Introduction

Deux questions

- **Question 1** : Existence de solution
  - Si C est fini, c'est évident
  - Si C est infini, c'est moins trivial
- **Question 2** : Calcul de la solution
  - Si C est fini mais grand, c'est "difficile"
  - Si $C \subset \mathbf{R}^n$ et que les fonctions sont dérivables, c'est plus facile

Principe de Fermat

- Pierre de Fermat, 1601 (Beaumont-de-Lomagne, près de Montauban) – 1665 (Castres)
- Principe de Fermat : la lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit minimale
- méthode, dite de maximis et minimis
- précurseur du calcul différentiel

Problème

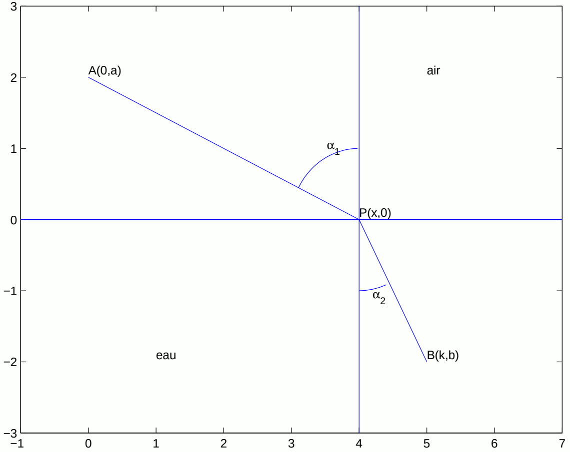


FIG.: Principe de Fermat.

Exemple 2 : Condensateur

Un condensateur chargé à une tension de U_0 volts se décharge sur une résistance. On mesure la tension U entre les armatures du condensateur toutes les secondes pendant un intervalle de temps de 10 secondes. Les résultats des mesures sont données dans la table

t_i	U_i	t_i	U_i
0	100	6	15
1	75	7	10
2	55	8	10
3	40	9	5
4	30	10	5
5	20		

Résidus

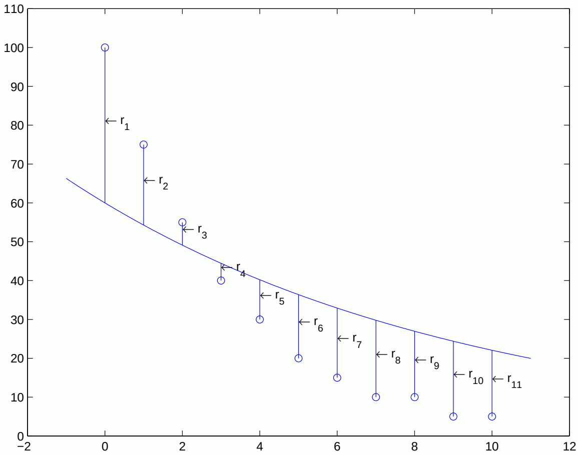


Fig.: Critères des moindres carrés

Exemple 3 : modèle de Kaplan

On désire étudier la diffusion d'une drogue dans un organe d'un corps donné. La drogue est injectée par intraveineuse dans le sang à l'instant $t_0 = 0$. On modélise le système par un modèle à compartiments (*cf.*la figure 3).

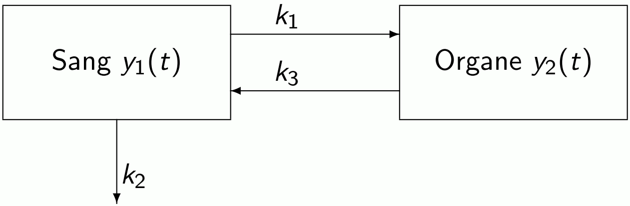


FIG.: Modèle par compartiments.

Données

Les concentrations dans le sang, mesurées à différents instants, sont données à la table 1.

t_i	y_{i1}	t_i	y_{i1}
0.25	215.6	3.00	101.2
0.50	189.2	4.00	88.0
0.75	176.0	6.00	61.6
1.00	162.8	12.00	22.0
1.50	138.6	24.00	4.4
2.00	121.0	48.00	0.0

TAB.: Données pour l'exemple de Kaplan.

Le système d'équations différentielles décrivant le modèle est alors

Modèle

Le système d'équations différentielles décrivant le modèle est alors

$$(EDO)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \dot{y}_1(t) = -(k_1+k_2)y_1(t) + k_3 y_2(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \dot{y}_2(t) = k_1 y_1(t) - k_3 y_2(t) \\ y_1(0) = c_0 \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Résidus

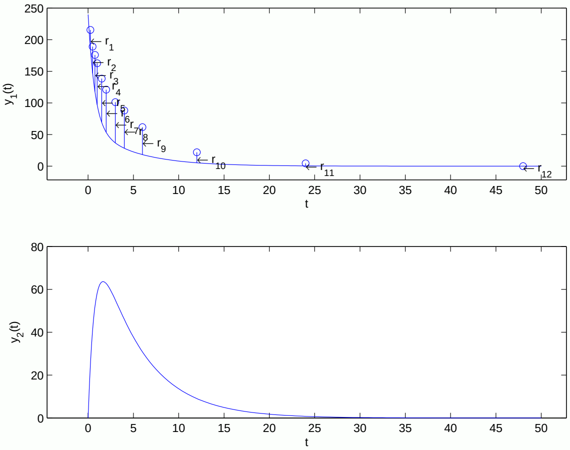


FIG.: Critère des moindres carrés pour le modèle de Kaplan.

Exemple 4 : Fisher

On veut mesurer la liaison entre 2 gènes dominants, l'un contrôlant la couleur d'une fleur, rouge (R) est dominant sur blanc (b), et l'autre la taille, grand (G) est dominant sur petit (p). Dans la descendance F_2, issu de deux populations homozygotes de phénotype $[RG]$ et $[bp]$, on a étudié $n = 3839$ plantes. On a obtenu les résultats de la table 2.

Phénotypes	$[RG]$	$[Rp]$	$[bG]$	$[bp]$
Effectifs observés	1997	906	904	32

TAB.: Données de Sir R.A. Fisher.

Probabilités

Le problème est d'estimer, à partir de ces données le taux de recombinaison r.
Ici la population F_1 est hétérozygote de génotype Rb, Gp. Nous avons donc les probabilités de la table 3 pour les différents gamètes possibles et les différents croisements possibles.

♀ : ♂	RG $\frac{1}{2}(1-r)$	bp $\frac{1}{2}(1-r)$	Rp $\frac{1}{2}r$	bG $\frac{1}{2}r$
RG $\frac{1}{2}(1-r)$	$[RG]$ $\frac{1}{4}(1-r)^2$	$[RG]$ $\frac{1}{4}(1-r)^2$	$[RG]$ $\frac{1}{4}r(1-r)$	$[RG]$ $\frac{1}{4}r(1-r)$
bp $\frac{1}{2}(1-r)$	$[RG]$ $\frac{1}{4}(1-r)^2$	$[bp]$ $\frac{1}{4}(1-r)^2$	$[Rp]$ $\frac{1}{4}r(1-r)$	$[bG]$ $\frac{1}{4}r(1-r)$
Rp $\frac{1}{2}r$	$[RG]$ $\frac{1}{4}r(1-r)$	$[Rp]$ $\frac{1}{4}r(1-r)$	$[Rp]$ $\frac{1}{4}r^2$	$[RG]$ $\frac{1}{4}r^2$
bG $\frac{1}{2}r$	$[RG]$ $\frac{1}{4}r(1-r)$	$[bG]$ $\frac{1}{4}r(1-r)$	$[RG]$ $\frac{1}{4}r^2$	$[bG]$ $\frac{1}{4}r^2$

TAB.: Probabilités pour la descendance F_2

Modèle

Par suite nous avons dans la population F_2 la loi suivante pour la variable aléatoire phénotype X

$$\begin{array}{rcl} X : F_2 & \longrightarrow & \{[RG],[Rp],[bG],[bp]\} \\ \text{1 plante} & \longmapsto & \text{son phénotype,} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P(X=[RG]) & = & \frac{1}{4}(3-2r+r^2) = \frac{2+\theta}{4} \\ P(X=[Rp]) & = & \frac{1}{4}(2r-r^2) = \frac{1-\theta}{4} \\ P(X=[bG]) & = & \frac{1}{4}(2r-r^2) = \frac{1-\theta}{4} \\ P(X=[bp]) & = & \frac{1}{4}(1-r)^2 = \frac{\theta}{4} \end{array}$$

Exemple 4 : problème linéaire

Un fermier désire déterminer les quantités de lisier de porc et d'engrais composé à étendre sur 20 ha de prairie de façon à optimiser le coût total de la fertilisation. Le coût et la composition du lisier et de l'engrais sont donnés à la table 4.

	coût (par tonne)	composition chimique (kgt^{-1})		
		azote	phosphate	potasse
lisier	25 francs	6	1.5	4
engrais	1300 francs	250	100	100

TAB.: Coûts et compositions des engrais

Le fermier veut appliquer au moins 75 $kgha^{-1}$ d'azote, 25 $kgha^{-1}$ de phosphate et 35 $kgha^{-1}$ de potasse. Il ne peut appliquer le lisier qu'à un taux maximum de 8 $t/heure$ et l'engrais qu'à un taux maximum de 0.4 $t/heure$. Il ne peut de plus consacrer pour ce travail qu'un maximum de 25 heures.

Gestion de portefeuille I

- Harry Markowitz, prix Nobel d'économie en 1990
- On a :
  - une quantité fixé d'argent
  - n actifs différentes (actions, stocks, ...)
- On connaît :
  - Pour tout actif i son espérance mathématique μ_i et sa variance σ_i^2
  - Pour tout actifs i et j leur coefficient de corrélation linéaire ρ_{ij}
- On note $x = (x_1, \ldots, x_n)$ où x_i représente la proportion investie dans l'actif i

Gestion de portefeuille II

- Le portefeuille sera dit efficient si, pour une variance fixée, il a la plus grande espérance mathématique

$$(P)\begin{cases} Max\ E(x) \\ Var(x) = V \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

- On peut aussi s'intéresser au problème $(MV0)$ (Mean-Variance 0ptimization) de Markowitz.

$$(MVO)\begin{cases} Min\ Var(x) \\ E(x) \geq R \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Problème du sac à dos de Knapsack

Un alpiniste veut mettre dans son sac à dos un maximum de 16 kg de ravitaillement. Il peut choisir un certain nombre d'unités de trois produits différents. Le poids unitaire en kilogrammes et la valeur énergétique unitaire des ces produits sont connus et donnés dans la table (5).

Produits	I	II	III
Poids	2	5	7
Valeurs	4	10	15

TAB.: Poids unitaires et valeurs énergétiques unitaires.

Le problème pour l'alpiniste est de savoir ce qu'il doit emporter pour avoir une valeur totale en calories maximale sans dépasser les 16 kg.

problème d'affectation de ressources

Dans un service hospitalier, les malades i attendent d'être opérés. Le malade i a besoin d'une durée d'opération D_i. D'autre part, compte tenu des disponibilités des chirurgiens, la somme des durées des opérations possibles chaque jours j de la période étudiée est connue et égale à T_j. On veut minimiser la somme des pénalités d'attente pour les différents malades. On note :

- $x_{ij} = 1$ si le malade i est opéré le jour j ;
- $x_{ij} = 0$ si le malade i n'est pas opéré le jour j ;
- c_{ij} la pénalité du malade i s'il est opéré le jour j. c_{ij} est une fonction croissante de j.

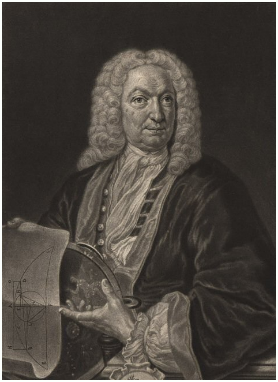
Alignement de séquences

Soit 2 séquences $CTGTATC$ et $CTATAATCCC$. On désire trouver le "meilleur" alignement possible. À chaque alignement, est associé un score (simple ici) suivant : pour chaque position on associe 0 si les 2 bases sont identiques, $+1$ si les deux bases sont différentes et $+3$ s'il y a un "trou". On effectue ensuite la somme. La figure (5) donne un exemple de la fonction score S.

$$\begin{array}{cccccccccccccc} C & T & A & T & - & A & A & - & T & C & C & C & & \\ - & - & C & T & G & T & A & T & C & - & - & - & & \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & = & 24 \end{array}$$

FIG.: Exemple de calcul d'un score.

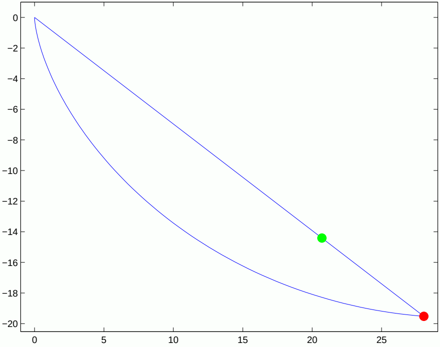
Problème de la brachistochrone I



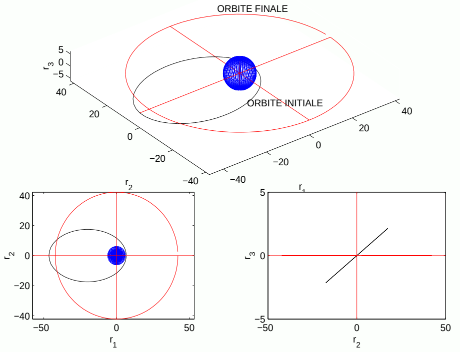
Jean Bernoulli 27 juillet 1667 – 1er janvier 1748.
Ce problème consiste en la recherche dans un plan vertical du chemin reliant 2 points P_0 et P_f de ce plan, suivant lequel un corps M entrainé par son propre poids effectuera le trajet de P_0 à P_f en un temps minimum. On suppose qu'il n'y a pas de frottement

Problème de la brachistochrone I

- $v = \sqrt{2g(-y(x))}$
- $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ et $t = ds/\sqrt{2g(-y(x))}$
- $$T : C^1([0, x_f], \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$
  $$T(y(.)) = \int_0^{x_f} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2g(-y(x))}} dx$$
- $$(P) \begin{cases} Min\ T(y(.)) \\ y(0) = 0 \\ y(x_f) = y_f . \end{cases}$$



Transfert orbital



- Orbite de départ LEO : $P = 11.625$ Mm, $e = 0.75$ and $i = 7°$
- Orbite finale : orbite géostationnaire
- Masse initiale : $m_0 = 1500$ kg
- Poussée : $T_{\max} = 0.1$ N

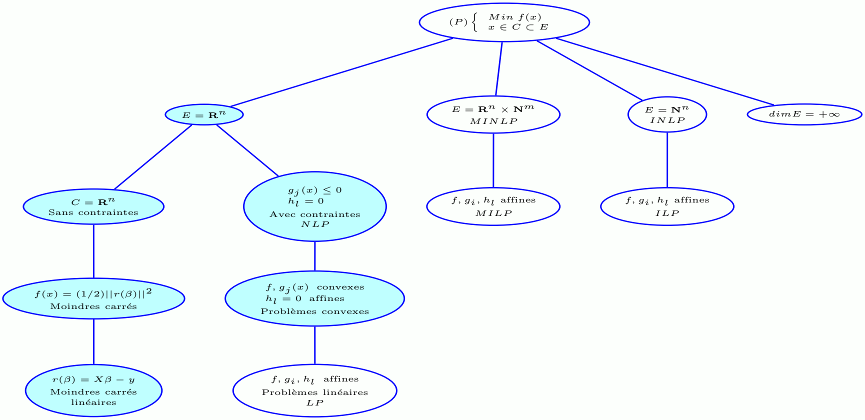
t_f min, $m(t_f)$ max

$$(P)\begin{cases} Min \quad t_f = \int_0^{t_f} dt \quad t_f \ \text{libre} \\ \dot{r}(t) = v(t) \qquad pp. \\ \dot{v}(t) = -\dfrac{\mu r(t)}{|r(t)|^3} + \dfrac{T_{\max}}{m(t)} u(t) \\ \dot{m}(t) = -\beta T_{\max}|u(t)| \\ (r(t), v(t), m(t)) \in A \\ |u(t)| \leq 1 \\ r(0), v(0), m(0) \quad \text{fixé} \\ r(t_f), v(t_f) \quad \text{fixé}, \end{cases}$$

Problème de contrôle optimal

$$(P)\begin{cases} Min \quad \int_0^{t_f} |u(t)| dt \quad t_f \ \text{fixé} \\ \dot{r}(t) = v(t) \qquad pp. \\ \dot{v}(t) = -\dfrac{\mu r(t)}{|r(t)|^3} + \dfrac{T_{\max}}{m(t)} u(t) \\ \dot{m}(t) = -\beta T_{\max}|u(t)| \\ (r(t), v(t), m(t)) \in A \\ |u(t)| \leq 1 \\ r(0), v(0), m(0) \quad \text{fixé} \\ r(t_f), v(t_f) \quad \text{fixé}, \end{cases}$$

Classification optimisation différentiable



l'Optimisation en Informatique et mathématiques appliquées

- $1^{\text{ère}}$ année
  - Convexité
  - Existence de solution
  - Condition nécessaire, condition suffisante
  - Notion de dualité
  - Problèmes aux moindres carrés (y compris algorithmique)
- $2^{\text{ième}}$ année
  - Optimisation numérique
  - Recherche opérationnelle (Programmation Linéaire)
  - Contrôle optimal (majeure mathématique)
- $3^{\text{ième}}$ année
  - Optimisation discrète
  - Contrôle optimal

Évaluation

- Examen écrit Calcul différentiel : 2 ECTS (1 page A4 recto-verso)
- Projet : 2 ECTS (Calcul différentiel et Optimisation)
- Examen écrit Optimisation : 2 ECTS (1 page A4 recto-verso)