I] Rque prélim. : (E,θ) compact $\Rightarrow \mathcal{C}^0(E,F)\subset (F^E)_b$; δ désignant la métrique uniforme (cf exo 3. TD2), $(\mathcal{C}^0(E,F),\delta)$ est 1 ssem de $((F^E)_b,\delta)$.

Il s'agit de m.q. : $(\forall\varepsilon>0)(\exists N_\varepsilon\geq 0)(\forall n\geq N_\varepsilon): \delta(f_n,f) \overset{d}{=} \sup_{x\in E} d(f_n(x),f(x)) < \varepsilon$?

Soit donc $\varepsilon>0$ donné. $(\forall n\geq 0)$: $X_n^\varepsilon \overset{d}{=} \{x\in E / d(f_n(x),f(x))\geq \varepsilon\}$; alors, si on note :

$g_n : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x\longmapsto g_n(x) \overset{d}{=} d(f_n(x),f(x))$ on voit que : $X_n^\varepsilon = g_n^{-1}([\varepsilon,+\infty[)$ or g_n est une app. cont. comme composée d'app. cont.

(très précisément : $g_n = d\circ h_n$ où $h_n: E\longrightarrow F\times F$, $x\longmapsto h_n(x)\overset{d}{=}(f_n(x),f(x))$ càd $h_n=(f_n,f)$)

et comme $[\varepsilon,+\infty[\,\in \mathcal{F}_{\mathbb{R}_+} \Rightarrow (\forall n\geq 0): X_n^\varepsilon\in\mathcal{F}_E$. De plus la s. $(X_n)_{n\geq0}$ est $\searrow$, en effet : si $x\in X_{n+1}^\varepsilon \Rightarrow d(f_{n+1}(x),f(x))\geq\varepsilon$ mais comme par hyp. la s. $(d(f_n(x),f(x)))_{n\geq0}$ est $\searrow$ $\Rightarrow d(f_{n+1}(x),f(x))\leq d(f_n(x),f(x)) \Rightarrow d(f_n(x),f(x))\geq\varepsilon \Rightarrow x\in X_n^\varepsilon$ cqfd. Enfin : $\bigcap_{n\geq0} X_n^\varepsilon=\emptyset$ car sinon : $(\exists x\in E)(\forall n\geq0): d(f_n(x),f(x))\geq\varepsilon$ contradiction avec $(f_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{C.S} f$.

On est donc en présence d'1 s. $\searrow$ $(X_n^\varepsilon)_{n\geq0}$ de fermés dont l'$\bigcap$ est vide de E compact alors (iii) ppté 5.2 $\Rightarrow$ $(\exists N\in\mathbb{N})$: $X_N^\varepsilon=\emptyset$ mais alors cela signifie que :

$(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geq N): X_n^\varepsilon=\emptyset$ puisque $X_n^\varepsilon\subset X_N^\varepsilon$ (la s. est $\searrow$) et donc :
$(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geq N)(\forall x\in E): d(f_n(x),f(x))<\varepsilon$, càd : $(f_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{\delta} f$ cqfd.

2°) Rques : . à contrario du 1°) où $(\mathcal{C}^0(E,F),\delta)$ n'était pas 1 evn, ici $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ est bien 1 evn car $\mathbb{R}$ est 1 ev, alors que F ne l'était pas.
. Une récurrence évidente m.q. les u_n sont en fait des polynômes.

. Montrons par récurrence que la fon. $\sqrt{\cdot}$ est 1 majorant des u_n sur [0,1]. En effet :

$(\forall t\in[0,1]): u_0(t)=0\leq\sqrt t$; (H.R.) : $(\forall t\in[0,1]): u_n(t)\leq\sqrt t$. Alors :

$(\forall t\in[0,1]): \sqrt t - u_{n+1}(t) = \sqrt t - u_n(t) - \frac12(t-u_n^2(t)) = \underbrace{(\sqrt t - u_n(t))}_{\geq 0 \text{ par H.R}}\Big(1-\frac12\underbrace{(\sqrt t + u_n(t))}_{\leq 2}\Big)\geq 0$ cqfd.

On en déduit alors, tjs par récurrence triviale, que : $(\forall n\geq0)(\forall t\in[0,1]): u_n(t)\geq 0$

Mais alors la s. $(u_n)_{n\geq0}$ est $\nearrow$ puisque : $u_{n+1}(t)=u_n(t)+\frac12\underbrace{(t-u_n^2(t))}_{\geq0}\geq u_n(t)$.

Ainsi : $(\forall t\in[0,1])$ la s. num. $(u_n(t))_{n\geq0}$ est $\nearrow$ et majorée par $\sqrt t$ ds $\mathbb R$ $\Rightarrow$ elle cvge

et on a : $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) + \frac12\big(t-(\lim_n u_n(t))^2\big)$ (car $(\cdot)^2$ est cont. sur $\mathbb R$)

D'où : $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = +\sqrt t$ ($-\sqrt t<0$ est exclu car $u_n\geq0$, $(u_n)_n \nearrow$). Bilan : $(u_n)_{n\geq0}\xrightarrow[n\to\infty]{C.S.}\sqrt\cdot$

et on a : $d(u_{n+1}(t),\sqrt t)=|u_{n+1}(t)-\sqrt t| = \sqrt t - u_{n+1}(t) \leq \sqrt t - u_n(t) = |u_n(t)-\sqrt t| = d(u_n(t),\sqrt t)$, et

comme tous les u_n sont cont., que $\sqrt\cdot$ est cont. et que [0,1] est compact, le thm de Dini $\Rightarrow$ C.U. cqfd.

Or on sait que : $\operatorname{Inf}(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ et $\operatorname{Sup}(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ comme A est 1 ss.algèbre on sait déjà que $f+g$ et $f-g \in A$. Tout se résume à démontrer que : $(\forall f \in A) : |f| \in A$? Ceci va être 1 csque du I] 2°).

Posons : $a \overset{d}{=} \|f\|_\infty \neq 0$ (sinon $f=0$ trivial) et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la s. de poly. réels du I] 2°). Alors : $(\forall n \geq 0)$: $u_n\left(\frac{f^2}{a^2}\right)$ est 1 comb. lin des puissances de f, donc $u_n\left(\frac{f^2}{a^2}\right) \in A$ car A en tant que ss.alg. est stable pour $(+,\circ,\times)$

De plus : $\frac{f^2}{a^2}(E)$ est un compact de $\mathbb{R}$ inclus ds $[0,1]$ (car f^2 cont., E compact, $0 \leq \frac{f^2}{a^2} \leq 1$)

Alors I] 2°) $\Rightarrow$ $\left(u_n\left(\frac{f^2}{a^2}\right)\right)_{n\geq 0} \xrightarrow[n\to\infty]{C.U} \sqrt{\frac{f^2}{a^2}} = \frac{|f|}{a}$ ce qui signifie que $|f|$ est limite uniforme de la s. de pts $\left(a \cdot u_n\left(\frac{f^2}{a^2}\right)\right)_{n\geq 0}$ de A $\Rightarrow$ $|f| \in \overline{A} \underset{A \text{ fermé}}{=} A$ cqfd

2°) La démons de S.W. se fait en deux temps :

1ère étape : m.q. $(\forall f \in \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R}))(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists g_{x,\varepsilon} \in \overline{A})$: $g_{x,\varepsilon}(x) = f(x)$ et $g_{x,\varepsilon}(y) \leq f(y) + \varepsilon \ \forall y \in E$

Soit de f, x, ε donnés. On pose $\alpha \overset{d}{=} f(x)$; on se donne $y \neq x$ et on note $\beta \overset{d}{=} f(y)$.

Puisque A sépare les pts de E $\overset{\text{déf 2.1}}{\Longrightarrow}$ $(\exists g_y \in A)$: $g_y(x) = \alpha = f(x)$ et $g_y(y) = \beta = f(y)$.

Mais : $g_y - f \in \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ et donc : $\Omega_y \overset{d}{=} (g_y - f)^{-1}(\underbrace{]-\infty,\varepsilon[}_{\text{ouv. de } \mathbb{R}})$ est un ouvert de E.

comme de plus : $y \in \Omega_y$ et $x \in \Omega_y \ \forall y$, on a : $E = \bigcup_{y \in E \setminus \{x\}} \Omega_y$, or E est compact, de HBL $\Rightarrow$ $(\exists n \geq 1)$: $E = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{y_i}$. Considérons alors : $g_{x,\varepsilon} \overset{d}{=} \operatorname{Inf}_{i=1,n} g_{y_i}$

Tts les g_{y_i}, $i=1,n$, $\in \overline{A}$ ss alg. fermé $\overset{1°)}{\Longrightarrow}$ $g_{x,\varepsilon} \in \overline{A}$ et $g_{x,\varepsilon}$ vérifie bien :

$g_{x,\varepsilon}(x) = \operatorname{Min}_{i=1,n} g_{y_i}(x) = \alpha = f(x)$ et pour y qcque $\in E\setminus\{x\}$: $(\exists 1 \leq i_0 \leq n)$: $y \in \Omega_{y_{i_0}}$

alors : $g_{x,\varepsilon}(y) = \operatorname{Min}_{i=1,n} g_{y_i}(y) \leq g_{y_{i_0}}(y)$, or $y \in \Omega_{y_{i_0}} \Rightarrow g_{y_{i_0}}(y) - f(y) < \varepsilon$ cqfd

2ème étape : m.q. $\overline{A}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ càd : $(\forall f \in \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R}))(\forall \varepsilon > 0)(\exists g \in \overline{A})$: $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$?

Soit donc f et ε donnés. Fixons x qcque $\in E$ alors la 1ère étape $\Rightarrow$ $(\exists g_{x,\varepsilon} \in \overline{A})$: $g_{x,\varepsilon}(x) = f(x)$ et $g_{x,\varepsilon}(y) \leq f(y) + \varepsilon \ \forall y \in E$. Là encore la fon. $g_{x,\varepsilon} - f \in \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ et donc : $\Omega_x \overset{d}{=} (g_{x,\varepsilon} - f)^{-1}(]-\varepsilon,+\infty[)$ est 1 ouvert de E, et comme $x \in \Omega_x \Rightarrow E = \bigcup_{x\in E} \Omega_x$ compact $\overset{\text{HBL}}{\Longrightarrow}$ $(\exists n \geq 1)$: $E = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{x_i}$

On pose cette fois-ci : $g \overset{d}{=} \operatorname{Sup}_{i=1,n} g_{x_i,\varepsilon} \in \overline{A}$ d'après 1°) et g vérifie bien : pour y qcque $\in E$

$g(y) = \operatorname{Max}_{i=1,n} g_{x_i,\varepsilon}(y) \leq f(y) + \varepsilon$. Mais d'autre part : $y \in E = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{x_i} \Rightarrow (\exists 1 \leq i_0 \leq n)$: $y \in \Omega_{x_{i_0}}$

et donc : $g_{x_{i_0},\varepsilon}(y) - f(y) > -\varepsilon$ càd : $g(y) \geq g_{x_{i_0},\varepsilon}(y) > f(y) - \varepsilon$. D'où finalement :

$(\forall y \in E)$: $|g(y) - f(y)| \leq \varepsilon$, càd : $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$ cqfd.

de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ (car $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}[X]$ stable pour $(+,\cdot,*)$).

De plus $\mathbb{R}[X]$ sépare les pts de $[0,1]$ donc le Th. de S.W s'applique $\Rightarrow$ ($[0,1]$ étant compact) : $\overline{\mathbb{R}[X]}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ cqfd. (c'est le Th. de W.)

- $\mathcal{C}^0(T,\mathbb{C})$, où $T \stackrel{d}{=} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, désigne de l'ens. des fcns. cont. de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{C}$ 1-périodiques.

c'est bien 1 ev et $\|\cdot\|_\infty$ est bien 1 norme sur $\mathcal{C}^0(T,\mathbb{C})$ puisque : $\|f\|_\infty \stackrel{d}{=} \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| < +\infty$.

$(\mathcal{C}^0(T,\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$ est en bij isométrique avec $(\mathcal{C}^0([0,1]_{(0=1)},\mathbb{C}),\|\cdot\|_\infty)$ et $[0,1]_{(0=1)}$ compact. (K)

De plus : $A \stackrel{d}{=} \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{e^{2i\pi n\cdot}\}\right) \subset \mathcal{C}^0(T,\mathbb{C})$, A est stable pour $(+,\cdot,*)$, c'est donc une ss.algèbre (à élmt unité corresp. à $n=0$) qui sépare les pts de $[0,1]_{(0=1)}$ puisque $t \stackrel{d}{=} e^{2i\pi\cdot}$ convient ($n=1$). Ds le cas des fcns à val. cpxes on a une condition additionnelle à vérifier, à savoir : $f\in A \Rightarrow \overline{f} \in A$ ce qui est vrai ici puisque $\overline{e^{2i\pi n\cdot}} = e^{-2i\pi n\cdot} = e^{2i\pi(-n)\cdot}$ avec $-n\in\mathbb{Z}$. Donc le Th de S.W. s'applique $\Rightarrow$

$$\overline{A}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathcal{C}^0(T,\mathbb{C})$$

ceci se traduit par : Tte fcn cont 2π-périodique est limite unif d'1 s. de poly. trigo.

(K) cf. Schwarz p. 1?