Epreuve de Topologie

Session 2 jeudi 30/5/2013

Durée : 1 h 45. Documents autorisés : une feuille de notes recto-verso.

▻Exercice 1 (6 points): Soit $(X,\mathcal{O})$ et $(Y,\mathcal{O}')$ deux espaces topologiques et $f \in \mathscr{C}^\circ(X,Y)$. On note

$$\Gamma \overset{n}{=} \text{«graphe de } f\text{»} \overset{\text{def}}{\equiv} \{ (x,y) \in X\text{x}Y / \ y = f(x) \}.$$

3 1°) Montrer que Γ et X sont homéomorphes.

2°) Montrer que : $[\,(Y,\mathcal{O}')$ séparé $] \Rightarrow [\,\Gamma$ fermé dans $X\text{x}Y\,]$.

3°) Montrer que la « réciproque » du 2°) est fausse, c.à.d. : une application de $(X,\mathcal{O})$ dans $(Y,\mathcal{O}')$ séparé, dont le graphe est fermé dans $X\text{x}Y$, n'est pas nécessairement continue.

(Nota : on pourra étudier le contre exemple fourni par $f : (\mathbb{R},\mathscr{T}_u) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathscr{T}_u)$
$x \longmapsto f(x) \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$).

▻Exercice 2 (6 points): On note $E \overset{n}{=} (\mathscr{C}^\circ([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, où : $(\forall x \in E) : \|x\|_\infty \overset{\text{def}}{\equiv} \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$

Soit F le sous-ensemble de E tel que : $F \overset{n}{=} \{x \in E / \ x(0) = 0, x(1) = 1, \|x\|_\infty = 1\}$.

1°) Montrer que l'ensemble F est fermé et borné dans E.

2°) Soit l'application : $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) \overset{\text{def}}{\equiv} \int_0^1 x^2(t)dt$. Montrer que f est continue sur E.

3°) Justifier que : $(\forall x \in F) : f(x) > 0$.

4°) l'ensemble F est-il compact dans E ?

▻Exercice 3(8 points): Soit $E \overset{n}{=} (\ell^2, \|\cdot\|)$ où : $\ell^2 \overset{\text{def}}{\equiv} \{ X \overset{n}{=} (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} / \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \}$ avec :

$$(\forall X \in E) : \|X\| \overset{\text{def}}{\equiv} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{1/2}.$$

On considère les deux suites d'opérateurs $(A_n)_{n\geq1}$ et $(B_n)_{n\geq1}$ définis sur E par :

$$A_n(X) \stackrel{\text{def}}{=} Y_n \stackrel{n}{=} (y_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}^*} \quad \text{où : } \quad y_k^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}.x_k \quad \forall\, k \geq 1, \qquad \text{et}$$

$$B_n(X) \stackrel{\text{def}}{=} Z_n \stackrel{n}{=} (z_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}^*} \quad \text{où : } \quad z_k^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ x_k & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}$$

1°) Justifier que A_n et B_n sont à valeurs dans E.

2°) Démontrer que : $(\forall\, n \geq 1)$: A_n et $B_n \in \mathscr{L}(E)$.

3°) Calculer $|||\, A_n \,|||$ et $|||\, B_n \,|||$.

4°) Les deux suites $(A_n(X))_{n\geq 1}$ et $(B_n(X))_{n\geq 1}$ convergent-elles dans E ?

5°) Les deux suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ convergent-elles dans $(\mathscr{L}(E), |||\,.\,|||)$?

Corrigé examen TOPOLOGIE session 2.

I] 1°) Soit : $\varphi : (X,\theta) \longrightarrow (\Gamma, \mathcal{T}_{ind})$, $x \longmapsto \varphi(x) \overset{d}{=} (x, f(x))$ où $\Gamma \subset X\times Y$ est muni de $\mathcal{T}_{ind}$: topologie induite sur Γ par la top. produit $\theta\otimes\theta'$.

Alors : $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ avec : $\varphi_1 \overset{n}{=} Id_X \in \mathcal{C}^0(X)$ et $\varphi_2 \overset{n}{=} f \in \mathcal{C}^0(X,Y) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^0(X,\Gamma)$.
φ est injective car si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) = (x_1, f(x_1)) \neq (x_2, f(x_2)) = \varphi(x_2)$; et φ est surjective car si $z = (x,y) \in \Gamma \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow z = (x, f(x)) = \varphi(x)$. Enfin : $\varphi^{-1} = P_{1/\Gamma}$, où P_1 est la 1ère proj canonique de $X\times Y$ sur X, comme $P_1 \in \mathcal{C}^0(X\times Y, X) \Rightarrow \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^0(\Gamma, X)$. Ainsi φ est-elle une bijection bi-continue $\Rightarrow$ Γ et X sont homéomorphes. cqfd.

2°) M.q. $\complement^{\Gamma}_{X\times Y}$ est voisinage de ses pts (donc ouvert et par suite Γ, son complémentaire, fermé !).

Soit $(x,y) \in \complement^{\Gamma}_{X\times Y}$, alors : $y \neq f(x)$ et : Y étant supposé séparé $\Rightarrow \begin{cases} \exists\, \Omega_{f(x)} \in \theta' : f(x) \in \Omega_{f(x)} \\ \exists\, \Omega_y \in \theta' : y \in \Omega_y \end{cases}$
avec $\Omega_{f(x)} \cap \Omega_y = \phi$. Or f est continue notamment au pt x, donc :
$\exists\, \Omega_x \in \theta$ tq : $x \in \Omega_x$ et $f(\Omega_x) \subset \Omega_{f(x)}$ mais alors : $(x,y) \in \Omega_x \times \Omega_y$ ET :

$\underbrace{\Omega_x \times \Omega_y}_{\text{ouvert} \in \theta\otimes\theta'} \subset \complement^{\Gamma}_{X\times Y}$ (donc $\complement^{\Gamma}_{X\times Y}$ ouvert) car si ça n'était pas le cas : il existerait $z \in \Omega_x \times \Omega_y \cap \Gamma$ càd : $z = (x,y)$ avec $y = f(x) \in \Omega_{f(x)} \cap \Omega_y = \phi$ impossible. cqfd.

3°) Ici : $(X,\theta) = (Y,\theta') \overset{d}{=} (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ e.t. séparé (et même métrisable) avec f continue partout sauf au pt $x = 0$. (car pour $V \overset{n}{=}]-1,1[\in \mathcal{V}(f(0))$ on a $U \overset{n}{=} f^{-1}(V) =]-\infty,-1[\cup \{0\} \cup]1,+\infty[\notin \mathcal{V}(0)$). Cependant le graphe de f est :

$\Gamma = \{(0,0)\} \cup \gamma$ avec : $\gamma \overset{n}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, x.y = 1\}$ notant $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \varphi(x,y) \overset{d}{=} x.y$
on voit que : $\gamma = \varphi^{-1}(\{1\})$ et comme $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \Rightarrow \gamma$ est fermé, et comme $\{(0,0)\}$ aussi $\Rightarrow \Gamma$ est fermé. cqfd.

II] 1°) On a : $F = F_0 \cap F_1 \cap S(0,1)$ où : $F_0 \overset{n}{=} \{x \in E \,/\, x(0) = 0\}$, $F_1 \overset{n}{=} \{x \in E \,/\, x(1) = 1\}$ et $S(0,1) \overset{n}{=}$ "sphère unité de E". Or ces 3 parties sont fermées puisque : $S(0,1) = \|\cdot\|_{\infty}^{-1}(\{1\})$ avec $\|\cdot\|_\infty$ continue. Et si on note :

$(\forall t \in [0,1])$: $\gamma_t : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \gamma_t(x) \overset{d}{=} x(t)$ alors $\gamma_t \in \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ car : $(\forall (x,y) \in E^2)$:
$$|\gamma_t(x) - \gamma_t(y)| = |x(t) - y(t)| \leq \underset{s\in[0,1]}{\mathrm{Max}}\, |x(s) - y(s)| = \|x-y\|_\infty$$
ce qui prouve que γ_t est 1-lipschitzienne. Ainsi :

$F_0 = \gamma_0^{-1}(\{0\})$ fermé et $F_1 = \gamma_1^{-1}(\{1\})$ fermé. cqfd. Enfin $F \subset S(0,1) \subset B_f(0,1)$ borné.

2°) On écrit : $f = f_1 \circ f_2$ avec : $f_2 : E \longrightarrow E$, $x \longmapsto f_2(x) \overset{d}{=} x^2$ et $f_1 : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \longmapsto f_1(y) \overset{d}{=} \int_0^1 y(t)\,dt$

Alors : $f_1 \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ car (linéaire car $\int$ linéaire) avec : $|f_1(y)| = \left|\int_0^1 y(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |y(t)|\,dt \leq \|y\|_\infty$ cqfd

et $f_2 \in \mathcal{C}^0(E)$ car : $(\forall t \in [0,1])$: $|x^2(t) - y^2(t)| = |(x(t) - y(t)).(x(t)+y(t))| \leq \|x-y\|_\infty . \|x+y\|_\infty$

donc en prenant y tq : $\|y - x\|_\infty \leq \eta \Rightarrow \|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \eta + \|x\|_\infty$

et donc : $\|x^2 - y^2\|_\infty \leq \eta.(\eta + 2\|x\|) \leq \varepsilon$ en prenant $\eta > 0$ suffisamment petit. cqfd.

D'où finalement : $f = f_1 \circ f_2 \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$ cqfd

3°) Soit $\varepsilon \in]0,1[$: $f(x) \overset{d}{=} \int_0^1 x^2(t)\,dt$, comme $x \in F \Rightarrow x(1)=1$

et de pour le ε choisi : $(\exists \eta_x > 0)(\forall t \in [0,1]) : |t-1| \leq \eta_x \Rightarrow |x(t)-1| \leq \varepsilon$ (c'est la continuité de x en $t=1$)

et donc : $(\ \text{"}\ )(\ \text{"}\ ) :\ \text{"} \Rightarrow x^2(t) \geq (1-\varepsilon)^2 \overset{n}{=} \alpha > 0$

Ainsi : $f(x) \geq \int_{1-\eta_x}^{1} x^2(t)\,dt \geq \int_{1-\eta_x}^{1} \alpha\,dt = \eta_x.(1-\varepsilon)^2 > 0$ cqfd

4°) On considère : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $x_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x_n(t) \overset{d}{=} t^n$ alors $x_n \in F$, avec :

$f(x_n) = \int_0^1 (t^n)^2\,dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} 0$. Ce qui signifie (avec le 3°)) que :

$\operatorname{Inf}_{x \in F} f(x) = 0$, cependant cette borne inf n'est pas atteinte (ce n'est pas un min) puisque 3°) $\Rightarrow (\forall x \in F) : f(x) > 0$ car $f(x) \neq 0$.

Ainsi F ne peut pas être compact, car sinon f étant continue sur F y atteindrait sa borne inférieure. cqfd.

III] 1°) Soit n fixé qcq ≥ 1 alors : $(\forall k \geq 1) : |y_k^{(n)}| \leq |x_k| \Rightarrow Y_n \in \ell^2$ car $X \in \ell^2$

et de même : $(\forall k \geq 1) : |z_k^{(n)}| \leq |x_k| \Rightarrow Z_n \in \ell^2$.

2°) L'opérateur A_n n'est autre que l'homothétie de rapport $1/n$: $A_n(X) = \frac{1}{n}.X$
c.à.d la X par le scalaire $\frac{1}{n}$, donc : $A_n \in \mathcal{L}(E)$.
L'opérateur B_n est l'annihilation des n 1ères composantes, il est linéaire (immédiat) et continu parce que : $\|B_n(X)\| = \|Z_n\| \leq \|X\|$, donc : $B_n \in \mathcal{L}(E)$.

3°) $|||A_n||| = \sup_{\|X\|=1} \|A_n(X)\| = \sup_{\|X\|=1} \|\frac{1}{n}.X\| = \sup_{\|X\|=1} \frac{1}{n}.\|X\| = 1/n \quad (\forall n \geq 1)$.

$|||B_n||| = \sup_{\|X\| \neq 0} \frac{\|B_n(X)\|}{\|X\|} \leq 1$ (d'après 2°)) et comme : $B_n(Z_n) = Z_n$ (Z_n pt fixe de B_n) ($B_n \circ B_n = B_n$ idempotent)

$|||B_n||| \geq \frac{\|B_n(Z_n)\|}{\|Z_n\|} = 1 \Rightarrow |||B_n||| = 1 \quad (\forall n \geq 1)$.

4°) $\left(\|A_n(X)\| = \frac{1}{n}\|X\|\right)_{n\geq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} 0$, donc : $(A_n(X))_{n \geq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{E} 0_{\ell^2}$

$\|B_n(X)\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2\right)^{1/2} \overset{d}{=}$ "reste d'ordre n de la série cvgte de terme général x_k^2"

donc : $(\|B_n(X)\|)_{n \geq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} 0$, donc : $(B_n(X))_{n\geq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{E} 0_{\ell^2}$

5°) $\left(|||A_n||| = \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} 0 \Rightarrow (A_n)_{n\geq 1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}(E)} 0_{\mathcal{L}(E)}$. Mais, bien que la suite $(|||B_n|||)_{n\geq 1}$ cvge dans $\mathbb{R}$, car constante égale à 1, la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans $\mathcal{L}(E)$ (complet car ℓ^2 complet) parce qu'elle n'est pas de Cauchy, en effet on a : en notant $e_{n+1} \overset{d}{=} (0,0,\dots,0,\underset{\uparrow \text{position } n+1}{1},0,0\dots0\dots) \in \ell^2$, on voit que

$|||B_{n+1} - B_n||| \overset{d}{=} \sup_{\|X\|=1} \|(B_{n+1}-B_n)(X)\| \underset{\text{car } \|e_{n+1}\|=1}{\geq} \|\underbrace{B_{n+1}(e_{n+1})}_{0} - \underbrace{B_n(e_{n+1})}_{=e_{n+1}}\| = \|e_{n+1}\| = 1$ cqfd.