Epreuve de Topologie

Durée : 1 h 45. Documents autorisés : une feuille de notes recto-verso.

⊳Exercice 1 (5 points): Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ on considère le sous-ensemble :

$$A \overset{\text{déf}}{=} (\,]0,1[\,\cap \mathbb{Q}) \cup \,]1,2[\, \cup \,]2,3[\, \cup \{4\}.$$

Déterminer : $\mathring{A},\ \overline{A},\ \overline{\mathring{A}},\ \mathring{\overline{A}},\ \mathring{\overline{\mathring{A}}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}},\ \partial A,\ \partial\mathring{A},\ \partial\overline{A}$.

⊳Exercice 2 (5 points): Soit E une algèbre normée, c'est-à-dire un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ muni d'une application bilinéaire appelée produit, notée $*$, et satisfaisant à :

$$(\forall (x,y) \in E^2) : \|x*y\| \leq \|x\| . \|y\| \quad .$$

Soit A une sous-algèbre de E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E, stable pour $*$.

Démontrer que $\overline{A}$ est une sous-algèbre de E.

⊳Exercice 3 (10 points): Soit (X,d) un espace métrique, $(E, \|\cdot\|)$ un K-espace vectoriel normé ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mu \in \,]0,1] \subset \mathbb{R}$. On note :

$$C^{\circ}_{\mu}(X,E) \overset{\text{déf}}{=} \{ f \in E^X / (\exists\, c_f \geq 0)(\forall (x,y) \in X^2) : \|f(x) - f(y)\| \leq c_f . (d(x,y))^{\mu} \} \quad .$$

(nota : de telles fonctions sont dites μ-Hölderiennes).

1°) Montrer que $C^{\circ}_{\mu}(X,E)$ est un sous-espace vectoriel de $C^{\circ}(X,E)$.

2°) Soit $a \in X$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_a : C^{\circ}_{\mu}(X,E) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \|f\|_a \overset{\text{déf}}{=} \|f(a)\| + \displaystyle\sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x,y)^{\mu}} \end{array} \quad .$$

Montrer que $\|\cdot\|_a$ est une norme sur $C^{\circ}_{\mu}(X,E)$.

3°) Montrer que : $(\forall\, b \in X \backslash \{a\})$: $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes .

4°) On suppose que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach . Montrer alors que:

$(C^{\circ}_{\mu}(X,E), \|\cdot\|_a)$ est aussi un espace de Banach .

Corrigé du partiel de Topologie 2013-2014

I] $\mathring{A} =]1,2[\cup]2,3[$; $\overline{A} = [0,3] \cup \{4\}$; $\overline{\mathring{A}} = [1,3]$;
$\mathring{\overline{A}} =]0,3[$; $\mathring{\overline{\mathring{A}}} =]1,3[$; $\overline{\mathring{\overline{A}}} = [0,3]$;
$\partial A = [0,1] \cup \{2,3,4\}$; $\partial \mathring{A} = \{1,2,3\}$; $\partial \overline{A} = \{0,3,4\}$

II] Il s'agit de montrer que $\overline{A}$ est un s.e.v. stable pour $*$, c.à.d. :
$$(\forall (x,y,\lambda) \in \overline{A}^2 \times K) : \lambda . x \in \overline{A}, \ x+y \in \overline{A} \text{ et } x*y \in \overline{A} \ ?$$
Or $(x,y) \in \overline{A}^2 \Rightarrow (\exists (x_n,y_n) \in (\overline{A}\times\overline{A})^{\mathbb{N}}) : (x_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{E} x$ et $(y_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{E} y$. Comme l'application $h_\lambda : E \to E$, $z \mapsto h_\lambda(z) \overset{d}{=} \lambda . z$ est continue (car linéaire et $|\lambda|$-Lipschitzienne) $\Rightarrow$
$(h_\lambda(x_n))_n \xrightarrow[n\to\infty]{E} h_\lambda(x)$, c.à.d. : $h_\lambda(x) = \lambda . x = \lim\limits_{n\to\infty} h_\lambda(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\lambda . x_n}_{\in A \text{ sev}} \in \overline{A}$ cqfd

De même on sait que l'application $s : E\times E \to E$, $(z,t) \mapsto s(z,t) \overset{d}{=} z+t$ est continue ; et comme : $((x_n,y_n))_n \xrightarrow[n\to\infty]{E\times E} (x,y)$, on a donc :
$(s(x_n,y_n))_n \xrightarrow[n\to\infty]{E} s(x,y)$, c.à.d. : $s(x,y) = x+y = \lim\limits_n s(x_n,y_n) = \lim\limits_n \underbrace{(x_n+y_n)}_{\in A \text{ sev}} \in \overline{A}$ cqfd.
Enfin montrons que : $x*y = \lim\limits_n x_n * y_n$? On a :
$$\|x_n * y_n - x*y\| = \|(x_n - x)*y_n + x*(y_n-y)\| \leq \|(x_n-x)*y_n\| + \|x*(y_n-y)\|$$
$$\leq \|x_n - x\| . \|y_n\| + \|x\| . \|y_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} 0 \text{ cqfd}$$
(ceci traduit en fait la continuité du produit $*$). Ainsi : $x*y = \lim\limits_n \underbrace{x_n * y_n}_{\in A \text{ s-algèbre}} \in \overline{A}$ cqfd.

III] 1°) M.q. : $\mathcal{C}^0_\mu(X,E) \subset \mathcal{C}^0(X,E)$, c.à.d. que toute fon. μ-Höldérienne est continue. Il f.m.q. :
$$(\forall f \in \mathcal{C}^0_\mu(X,E))(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta_{\varepsilon,x} > 0)(\forall y \in X) : d(x,y) \leq \eta_{\varepsilon,x} \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \ ?$$
Soit donc f, x, ε donnés. En prenant $y \in X$ tel que : $d(x,y) \leq \left(\varepsilon / C_f\right)^{1/\mu}$ (avec $C_f > 0$; si $C_f = 0 \Rightarrow f$ constante, donc f continue), on a : $\|f(x) - f(y)\| \leq C_f . (d(x,y))^\mu \leq C_f . \varepsilon / C_f = \varepsilon$.
donc il faut prendre : $\eta_{\varepsilon,x} \overset{d}{=} \left(\varepsilon / C_f\right)^{1/\mu}$ cqfd. Ensuite : $\mathcal{C}^0_\mu(X,E)$ est 1 s.e.v. de $\mathcal{C}^0(X,E)$ puisque si : $(f,g,\lambda) \in (\mathcal{C}^0_\mu(X,E))^2 \times K$, on a :
$$\|(f+\lambda.g)(x) - (f+\lambda g)(y)\| = \|(f(x) - f(y)) + \lambda(g(x) - g(y))\| \leq \|f(x) - f(y)\| + |\lambda| . \|g(x) - g(y)\|$$
$$\leq C_f . (d(x,y))^\mu + |\lambda| . C_g . (d(x,y))^\mu = \underbrace{[C_f + |\lambda| . C_g]}_{\overset{d}{=} C_h \geq 0} . (d(x,y))^\mu \text{ cqfd}$$
i.e. $h \overset{d}{=} f + \lambda g \in \mathcal{C}^0_\mu(X,E)$ cqfd.

2°) $f \in \mathcal{C}^0_\mu(X,E) \Rightarrow (\exists C_f \geq 0)(\forall (x,y) \in X^2, x \neq y) : \dfrac{\|f(x) - f(y)\|}{(d(x,y))^\mu} \leq C_f$, et donc ceci $\Rightarrow$: $\sup\limits_{x\neq y} \dfrac{\|f(x)-f(y)\|}{(d(x,y))^\mu} \le C_f$, donc $\|\cdot\|_x$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

. Si $f=0$ alors $\|f\|_a=0$ évident. Récip. : si $\|f\|_a=0$ alors : $\|f(a)\| = \sup\limits_{x\neq y}\dfrac{\|f(x)-f(y)\|}{(d(x,y))^\mu}=0$

$\Rightarrow (\forall x\neq y): f(x)=f(y)$, i.e. : f constante ; et $\|f(a)\|=0 \Rightarrow f(a)=0$, i.e. : $f=0$ cqfd.

. $(\forall \lambda\in K): \|\lambda.f\|_a = |\lambda|.\|f\|_a$ évident. $(\forall x\neq y): \|(f+g)(x)-(f+g)(y)\| \le \|f(x)-f(y)\|+\|g(x)-g(y)\|$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\neq y} \dfrac{\|(f+g)(x)-(f+g)(y)\|}{(d(x,y))^\mu} \le \sup\limits_{x\neq y} \dfrac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)^\mu} + \sup\limits_{x\neq y} \dfrac{\|g(x)-g(y)\|}{d(x,y)^\mu}$ et comme :

$\|(f+g)(a)\| \le \|f(a)\|+\|g(a)\| \Rightarrow \|f+g\|_a \le \|f\|_a+\|g\|_a$. Ainsi $\|\cdot\|_a$ est bien une norme sur $C^0_\mu(X,E)$ cqfd

3°) On a : $\big|\|f(a)\|-\|f(b)\|\big| \le \|f(a)-f(b)\| \Rightarrow \|f(a)\| \le \|f(b)\| + \dfrac{\|f(a)-f(b)\|}{d(a,b)^\mu}.d(a,b)^\mu$

si on note : $C_f \overset{d}{=} \sup\limits_{x\neq y} \dfrac{\|f(x)-f(y)\|}{(d(x,y))^\mu} \Rightarrow \|f(a)\|+C_f \le \|f(b)\| + C_f + C_f.d(a,b)^\mu \Rightarrow$

$\|f\|_a \le \|f(b)\| + (1+d(a,b)^\mu).C_f \le \|f(b)\|(1+d(a,b)^\mu) + (1+d(a,b)^\mu)C_f = \underbrace{\left[1+d(a,b)^\mu\right]}_{=k>0}.\|f\|_b$

ie : $\|\cdot\|_a$ moins fine que $\|\cdot\|_b$, et comme a et b jouent des rôles symé. : cqfd.

4°) Soit $(f_n)_n$ 1 suite de Cauchy d'élts de $C^0_\mu(X,E)$; on a :

$(\mathcal{C}) : (\forall\varepsilon>0)(\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N})(\forall p,q\ge N_\varepsilon): \|f_p-f_q\|_a\le\varepsilon$.

1ère étape : construction de la limite en 1 "certain sens" : puisque

$\|f_p-f_q\|_a = \|f_p(a)-f_q(a)\| + \sup\limits_{x\neq y}\dfrac{\|(f_p-f_q)(x)-(f_p-f_q)(y)\|}{d(x,y)^\mu}$, on a : $(\mathcal{C}) \Rightarrow$ la suite $(f_n(a))_n$ est de Cauchy dans E, or

E Banach $\Rightarrow$ elle cvge ds E. Mais on a vu (cf 3°)) que $\|\cdot\|_x$ est $\Leftrightarrow$ à $\|\cdot\|_a$, ceci $\forall x\in X$; donc on en déduit que : $(\forall x\in X): (f_n(x))_n$ cvge dans E, c.à.d. :

$(\forall x\in X)(\exists! z_x\in E): (f_n(x))_n \xrightarrow[n\to\infty]{E} z_x$. Bilan : si on note : $f: X\longrightarrow E,\ x\longmapsto f(x)\overset{d}{=}\lim\limits_n f_n(x)$, alors

on a montré que : $(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{C.S} f$ (cvge simple).

2ème étape : $f\in C^0_\mu(X,E)$? Prenons $p\ge N_\varepsilon$ (rg de Cauchy associé au $\varepsilon>0$). Alors :

$\|(f_p(x)-f(x))-(f_p(y)-f(y))\| = \|(f_p(x)-\lim\limits_q f_q(x)) - (f_p(y)-\lim\limits_q f_q(y))\|$

$= \lim\limits_q \|(f_p(x)-f_q(x))-(f_p(y)-f_q(y))\|$. Mais on sait que

quand : $q\ge N_\varepsilon$ on a : $\|(f_p-f_q)(x)-(f_p-f_q)(y)\|\le\varepsilon.(d(x,y))^\mu$, donc :

$\|(f_p-f)(x)-(f_p-f)(y)\|\le\varepsilon.d(x,y)^\mu$, cela : $\forall x\neq y$, ce qui prouve que la fon $f_p-f\in C^0_\mu(X,E)$

et comme : $f_p\in C^0_\mu(X,E)$ esp. vectoriel $\Rightarrow f\in C^0_\mu(X,E)$ cqfd

3ème étape : $(f_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_a} f$? Mq : $(\forall\varepsilon>0)(\exists N'_\varepsilon\ge0)(\forall p\ge N'_\varepsilon): \|f_p-f\|_a\le\varepsilon$?

Soit donc $\varepsilon>0$ donné ; la 2ème étape a montré qu'en prenant $p\ge N_{\varepsilon/2}$ (rg de Cauchy) on avait :

$\sup\limits_{x\neq y}\dfrac{\|(f_p-f)(x)-(f_p-f)(y)\|}{d(x,y)^\mu} \le \varepsilon/2$. De plus la convergence de $(f_p(a))_p$ vers $f(a)$ assure que : $(\exists N''_{\varepsilon/2}\ge0)(\forall p\ge N''_{\varepsilon/2}): \|f_p(a)-f(a)\|\le\varepsilon/2$

Ainsi en prenant : $p\ge N'_\varepsilon \overset{d}{=} \max(N_{\varepsilon/2},N''_{\varepsilon/2})$ on obtient : $\|f_p-f\|_a\le\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ cqfd