Epreuve de Topologie

Session 2 jeudi 5/6/2014

Durée : 1 h 45. Documents autorisés : une feuille de notes recto-verso.

▷Exercice 1 (6 points): On note $E \overset{n}{=} (\mathscr{C}^\circ([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, où : $(\forall x \in E) : \|x\|_\infty \overset{def}{=} \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$.

On considère l'opérateur A défini sur E par : $A(x) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto A(x)(t) \overset{def}{=} x(t^2)$$

1°) A est-il à valeurs dans E ?
2°) $A \in L(E)$?
3°) $A \in \mathscr{L}(E)$?
4°) Si oui calculer $|||A|||$. A est-il une isométrie ?

▷Exercice 2 (8 points): Soit $E \overset{n}{=} \{ x \overset{n}{=} (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \mathrm{card}\{ n \in \mathbb{N} / x_n \neq 0 \} \in \mathbb{N} \}$.

1°) E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
2°) L'application $\|\cdot\|$ définie par : $\|x\| \overset{def}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ est-elle une norme sur E ?
3°) Soit $a \overset{n}{=} (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On considère l'application :

$$f_a : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_a(x) \overset{def}{=} \sum_{n\in N} a_n x_n$$

a) Donner une condition suffisante portant sur la suite a (préciser à quel espace de suites doit appartenir a) pour que : $f_a \in \mathscr{C}^\circ(E,\mathbb{R})$.
b) En utilisant la suite (de suites) : $x^{(k)} \overset{n}{=} (x_n^{(k)})_n$ définie par :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) : \ x_n^{(k)} \overset{def}{=} \begin{cases} \mathrm{sgn}(a_n) & \text{si } n \le k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$$

Démontrer que la condition suffisante obtenue au a) est aussi une condition nécessaire .

▷Exercice 3 (10 points): On note $E \overset{n}{=} (\mathscr{C}^\circ([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, où : $(\forall x \in E) : \|x\|_\infty \overset{def}{=} \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$.

Soit $f \in \mathscr{C}^\circ(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, on considère la fonction φ , qui associe à $x \in E$ la fonction $\varphi(x)$ définie par :

$$\varphi(x) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \varphi(x)(t) \overset{def}{=} \int_0^1 f(t,s,x(s))ds$$

1°) Démontrer que φ est bien définie sur E .
2°) Démontrer que φ est à valeurs dans E .
3°) Démontrer que $\varphi \in \mathscr{C}^\circ(E,E)$.

Corrigé de l'épreuve de topologie session 2 2014

III] 1°) Pour que φ soit définie sur E il faut que la fon. intégrande

$$\psi_{t,x} : [0,1] \to \mathbb{R},\quad s \mapsto \psi_{t,x}(s) \overset{d}{=} f(t,s,x(s))$$

soit intégrable sur $[0,1]$. Notant :

$$\vartheta : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\quad s \mapsto \vartheta(s) \overset{d}{=} (t,s,x(s))$$

, on voit que : $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ avec :

$\vartheta_1(s) \overset{d}{=} t$ app cste donc $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

$\vartheta_2(s) \overset{d}{=} s$, ie : $\vartheta_2 = I_{[0,1]} \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ $\Rightarrow \vartheta \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}^3)$

$\vartheta_3(s) = x(s)$, ie : $\vartheta_3 = x \in E \overset{d}{=} \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

Ainsi : $\psi_{t,x} = f\circ\vartheta$, et comme $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) \Rightarrow \psi_{t,x} \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ comme composée des 2 app. cont. f et ϑ, donc $\psi_{t,x}$ est intégrable (Riemann) sur $[0,1]$ $\Rightarrow$ φ est bien définie sur E. cqfd

2°) Il s'agit de m.q. $\varphi(x)$ est une fon. continue (de t). Soit donc t_0 qcq $\in [0,1]$ et $\varepsilon>0$ donnés. On a : $(\forall t\in[0,1])$:

$$|\varphi(x)(t) - \varphi(x)(t_0)| = \left|\int_0^1 f(t,s,x(s))\,ds - \int_0^1 f(t_0,s,x(s))\,ds\right| \leq \int_0^1 |f(t,s,x(s)) - f(t_0,s,x(s))|\,ds$$

Notons : $K_x \overset{d}{=} x([0,1])$, K_x est 1 compact de $\mathbb{R}$ comme image directe du compact $[0,1]$ par l'app continue x. De plus : $[0,1]\times[0,1]\times K_x$ est un compact de $\mathbb{R}^3$ (produit cartésien de compacts, Th. de TYCHONOFF) sur lequel la fon. cont. f est donc Uniformément continue :

soit : pour $\varepsilon>0$: $(\exists \eta_{\varepsilon,K_x}>0)(\forall (t,s,u)\in[0,1]^2\times K_x)(\forall (t',s',u')\in\mathbb{R}^3)$:

$$\|(t',s',u')-(t,s,u)\|_{\mathbb{R}^3} \leq \eta_{\varepsilon,K_x} \Rightarrow |f(t',s',u')-f(t,s,u)| \leq \varepsilon$$

. En particulier si on a : $(t',s',u') \overset{d}{=} (t,s,x(s))$ et $(t,s,u) \overset{d}{=} (t_0,s,x(s))$ avec : $|t-t_0| \leq \eta_{\varepsilon,K_x}$, on a bien :

$$\|(t',s',u')-(t,s,u)\|_{\mathbb{R}^3} \overset{d}{=} \operatorname{Max}\left(|t-t_0|, |s-s|, |x(s)-x(s)|\right) = |t-t_0| \leq \eta_{\varepsilon,K_x}$$

. Donc :

$$|f(t,s,x(s))-f(t_0,s,x(s))| \leq \varepsilon \Rightarrow |\varphi(x)(t)-\varphi(x)(t_0)| \leq \int_0^1 \varepsilon\,ds = \varepsilon \quad \text{cqfd}.$$

3°) Soit x_0 fixé qcq $\in E$ et $\varepsilon>0$ donné. Il s'agit de m.q. φ est continue au pt x_0, ie :

$$(\exists \eta_{\varepsilon,x_0}>0)(\forall y\in E) : \|y-x_0\|_\infty \leq \eta_{\varepsilon,x_0} \Rightarrow \|\varphi(y)-\varphi(x_0)\|_\infty \leq \varepsilon \ ?$$

Or : $\|\varphi(y)-\varphi(x_0)\|_\infty \overset{d}{=} \operatorname{Max}_{t\in[0,1]} |\varphi(y)(t)-\varphi(x_0)(t)|$ avec : $(\forall t\in[0,1])$:

$$|\varphi(y)(t)-\varphi(x_0)(t)| = \left|\int_0^1 f(t,s,y(s))\,ds - \int_0^1 f(t,s,x_0(s))\,ds\right| \overset{(2)}{\leq} \int_0^1 |f(t,s,y(s))-f(t,s,x_0(s))|\,ds$$

Notant $K_0 \overset{d}{=} x_0([0,1])$, K_0 est 1 compact de $\mathbb{R}$ (idem qu'au 2°)) et donc f est Unif. Cont sur le compact : $[0,1]\times[0,1]\times K_0$, càd pour le $\varepsilon>0$ choisi :

$$(\exists \eta_{\varepsilon,K_0}>0)(\forall (t',s',u')\in\mathbb{R}^3)(\forall (t,s,u)\in[0,1]^2\times K_0) : \|(t',s',u')-(t,s,u)\|_{\mathbb{R}^3} \leq \eta_{\varepsilon,K_0} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$|f(t',s',u')-f(t,s,u)| \leq \varepsilon.$$

En particulier si on prend :

$t'=t$; $s'=s$; et y t.q. : $\|y-x_0\|_\infty = \operatorname{Max}_{s\in[0,1]} |y(s)-x_0(s)| \leq \eta_{\varepsilon,K_0}$, on est assuré que :

$$\|(t,s,y(s))-(t,s,x_0(s))\|_{\mathbb{R}^3} \overset{d}{=} \operatorname{Max}\left(|t-t|, |s-s|, |y(s)-x_0(s)|\right) = |y(s)-x_0(s)| \leq \eta_{\varepsilon,x_0} \quad \forall s\in[0,1]$$

et donc (1) $\Rightarrow |f(t,s,y(s))-f(t,s,x_0(s))| \leq \varepsilon$ et cela $\forall t\in[0,1]$; d'où par (2) :

$$(\forall t\in[0,1]) : |\varphi(y)(t)-\varphi(x_0)(t)| \leq \int_0^1 \varepsilon\,.ds = \varepsilon \Rightarrow \|\varphi(y)-\varphi(x_0)\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{cqfd}$$

II) 1/ E = ens. des s. quasi-nulles puisque : si $x \in E$, notant $I_x \overset{d}{=} \{n \in \mathbb{N} / x_n \neq 0\}$, on a : $\mathrm{Card}\, I_x \in \mathbb{N}$, donc : $(\forall n > \mathrm{Max}\, I_x) : x_n = 0$. Et une combinaison linéaire de 2 s. quasi-nulle étant 1 s.q.n. $\Rightarrow$ E est bien 1 s.e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2°) pour $x \in E$: $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \sup_{n \in I_x} |x_n| = \max_{n \in I_x} |x_n| \in \mathbb{R}$, donc $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E.

3°) f_a est bien définie sur E puisque : $f_a(x) \overset{d}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n . x_n = \sum_{n \in I_x} a_n . x_n$ (pseudo-série)

et f_a est linéaire car : $f_a(x + \lambda y) = \sum_{n \in I_x \cup I_y} a_n . (x_n + \lambda y_n) = \sum_{n \in I_x} a_n . x_n + \lambda \sum_{n \in I_y} a_n . y_n = f_a(x) + \lambda f_a(y)$

a) Si f_a, linéaire, est continue, elle est Lipschitzienne. Donc :

$(\exists k \geq 0)(\forall x \in E) : |f_a(x)| \leq k . \|x\|$. Or : $|f_a(x)| = \left|\sum_{n \in I_x} a_n . x_n\right| \leq \sum_{n \in I_x} |a_n| . |x_n| \leq \left(\sum_{n \in I_x} |a_n|\right) . \|x\|$

Alors : si $a \in \ell^1$: $(\forall x \in E)$: $|f_a(x)| \leq \|a\|_1 . \|x\|$ puisque : $\|a\|_1 \overset{d}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Donc une CS est que $a \in \ell^1$.

b) $a \in \ell^1$ est une C.N. : en effet : $(\forall k \in \mathbb{N})$: $x^{(k)} \in E$ avec : $\|x^{(k)}\| = 1$. De plus :

$|f_a(x^{(k)})| = \left|\sum_{n=0}^{k} \mathrm{sgn}(a_n) . a_n\right| = \sum_{n=0}^{k} |a_n| \Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} |f_a(x^{(k)})| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ uniquement si $a \in \ell^1$. Bilan : $[f_a \text{ continue}] \iff [a \in \ell^1]$.

I] 1°) Posant $h_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto h_2(t) \overset{d}{=} t^2$, on a : $A(x) = x \circ h_2$. Et comme $h_2 \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et que $x \in E \Rightarrow A(x) \in E$ cqfd

2°) A est linéaire, ceci résulte de la structure vectorielle algébrique de E, avec : $(\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R})$: $A(x + \lambda y) = (x + \lambda y) \circ h_2 = x \circ h_2 + \lambda y \circ h_2 = A(x) + \lambda A(y)$.

3°) A étant linéaire, m.q. A est Lipschitzie :

$\|A(x)\|_\infty \overset{d}{=} \sup_{t \in [0,1]} |A(x)(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t^2)| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)| \overset{d}{=} \|x\|_\infty$, donc

car $t \in [0,1] \iff t^2 \in [0,1]$

A est 1-Lipschitzie, d'où continu et donc $A \in \mathcal{L}(E)$.

4°) $|||A||| \overset{d}{=} \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1$; A étant linéaire et conservant la norme $\Rightarrow$ c'est une isométrie.