TP : Tir multiple et problème Bang–Bang

Olivier Cots & Joseph Gergaud

1 Introduction

L'objectif est ici la résolution numérique des problèmes de contrôle optimal à solution Bang–Bang, c'est-à-dire des problèmes où le contrôle optimal est discontinu. On considère pour cela le problème simple suivant :

$$(P)\begin{cases} Min \int_0^2 |u(t)|dt \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ |u(t)| \leq 1 \\ x(0) = x_0 = 0 \\ x(2) = x_f = 0.5 \end{cases}$$

2 Choix du point de départ

2.1 Étude de (P)

1. Visualiser la fonction de tir associée à (P) ;
2. Peut-on ici calculer la dérivée de la fonction de tir à l'aide des équations variationnelles vues au TP précédent ?
3. Résoudre (P) par le tir simple. On prendra comme erreurs locales relative et absolue `RelTol=AbsTol=1.e-10` et on considèrera les points de départs $p_0 = -1.1, -0.5; 0; 0.5$.

2.2 Méthodes homotopiques 1

On considère la famille de problèmes de contrôle optimal suivante :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon)\begin{cases} Min \int_0^2 (|u(t)| - \varepsilon(\ln|u(t)| + \ln(1-|u(t)|)))dt \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ |u(t)| < 1 \\ x(0) = x_0 = 0 \\ x(2) = x_f = 0.5 \end{cases}$$

La minimisation du hamiltonien est donnée par

$$u_\varepsilon(p) = \begin{cases} \frac{-2\varepsilon \text{sign}(p)}{\psi(p)-2\varepsilon-\sqrt{\psi^2(p)+4\varepsilon^2}} & \text{si} \quad p \neq 0, \\ \frac{\pm 2\varepsilon}{-1-2\varepsilon-\sqrt{1+4\varepsilon^2}} & \text{si} \quad p = 0, \end{cases}$$

où $\psi(p) = -1 + |p|$.

Remarque 2.1. *Dans le code on prendra*

$$u_\varepsilon(0) = \frac{-2\varepsilon}{-1-2\varepsilon-\sqrt{1+4\varepsilon^2}}.$$

On donne aussi pour $p \neq 0$

$$u'_\varepsilon(p) = \frac{2\varepsilon\left(1 - \frac{\psi(p)}{\sqrt{\psi^2(p)+4\varepsilon^2}}\right)}{(\psi(p) - 2\varepsilon - \sqrt{\psi^2(p) + 4\varepsilon^2})^2}.$$

1. Pour $\varepsilon = 1$
   (a) Visualiser la fonction de tir ;
   (b) Résoudre (P_ε) par le tir simple. On prendra comme erreurs locales relative et absolue `RelTol=AbsTol=1.e-10` et on considèrera les points de départs $p_0 = -10, -1, 0, 1, 10$.
2. Résoudre successivement (P_ε) pour $\varepsilon = 1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.0001$. Pour résoudre le problème pour ε_{i+1} on prendra la solution trouvée pour ε_i.

2.3 Résolution par tir multiple

Sachant que sur ce petit problème le contrôle optimal est égal à

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ \text{sign}(p(t)) & \text{si } t > t_1, \end{cases}$$

on peut trouver la solution en recherchant un zéro de la fonction de tir multiple

$$\begin{array}{rcl} S : \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ \begin{pmatrix} p_0 \\ t_1 \\ z_1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} z(t_1, t_0, z_0) - z_1 \\ z_1(t_f, t_1, z_1) - 0.5 \\ p_1 - 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

où $z_i = \begin{pmatrix} x_i & p_i \end{pmatrix}^T$ et $z(t_i, t_{i-1}, z_{i-1})$ est la solution du système différentiel en t_i avec la condition initiale $z(t_{i-1}) = z_{i-1}$.

1. Résoudre le problème par le tir multiple défini ci-dessus.