TP :Tir simple et dérivée

Olivier Cots & Joseph Gergaud

1 Introduction

On considère le problème simple de contrôle optimal suivant :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon)\begin{cases} Min\int_0^2(|u(t)|-\varepsilon(\ln|u(t)|+\ln(1-|u(t)|)))dt\\ \dot{x}(t)=-x(t)+u(t)\\ |u(t)|<1\\ x(0)=x_0=0\\ x(2)=x_f=0.5\end{cases}$$

On prendra dans la suite $\varepsilon=0.01$.

1. Écrire le problème aux deux bouts associé au problème $(P)_\varepsilon$. La maximisation de l'Hamiltonien donne ici
$$u_\varepsilon(p)=\begin{cases}\frac{-2\varepsilon\mathrm{sign}(p)}{\psi(p)-2\varepsilon-\sqrt{\psi^2(p)+4\varepsilon^2}} & \text{si} \quad p\neq 0,\\ \frac{\pm 2\varepsilon}{-1-2\varepsilon-\sqrt{1+4\varepsilon^2}} & \text{si} \quad p=0,\end{cases}$$
où $\psi(p)=-1+|p|$.
Remarque 1.1. *Dans le code on prendra*
$$u_\varepsilon(0)=\frac{-2\varepsilon}{-1-2\varepsilon-\sqrt{1+4\varepsilon^2}}.$$
On donne aussi pour $p\neq 0$
$$u'_\varepsilon(p)=\frac{2\varepsilon\left(1-\frac{\psi(p)}{\sqrt{\psi^2(p)+4\varepsilon^2}}\right)}{(\psi(p)-2\varepsilon-\sqrt{\psi^2(p)+4\varepsilon^2})^2}.$$
Bien que la fonction ne soit pas définie pour $p=0$, et donc non dérivable, on prendra dans le code la même expression.
2. Visualiser la fonction de tir $S_\varepsilon(y)$ pour $y\in[-2,2]$.
3. On prend comme point de départ $y^{(0)}=0.38$.
   (a) Résoudre l'équation $S_\varepsilon(y)=0$. On utilisera le vecteur d'options `OPTIONS=optimset('Display','iter')` dans `fsolve` pour afficher les résultats intermédiaires lors de la résolution de $S_\varepsilon(y)=0$ (cf. `help fsolve` et `help optimset`).

(b) On prend maintenant comme erreur local d'intégration les valeurs `Reltol=Abstol=1.e-10` (cf. `help ode45` et `help odeset`) ; résoudre $S_\varepsilon(y) = 0$.

Nous allons maintenant voir que le problème vient ici du calcul de la dérivée de la fonction de tir.

2 Calcul de la dérivée

2.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

On s'intéresse ici au problème de Cauchy suivant

$$(IVP) \begin{cases} \dot{z}(t) = \vec{H}(t, z(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases} .$$

Théorème 2.1. *Soit $\vec{H}$ une application continue de Ω ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ et localement Lipschitzienne par rapport à z, alors pour tout $(0, z_0)$ dans Ω, il existe une solution unique $z(., z_0)$ du problème de Cauchy (IVP) définie sur un intervalle $]\omega_-(z_0), \omega_+(z_0)[$*

Démonstration
cf. cours d'edo de deuxième année [2, 3]. □

On note

$$\Omega(t_f) = \{z_0 \in \mathbf{R}^n | (0, z_0) \in \Omega \text{ et } z(t_f, z_0) \text{ existe}\},$$

que l'on supposera non vide.

Théorème 2.2. *Soit $\vec{H}$ une application continue de Ω ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ qui admet une dérivée partielle par rapport à z continue ($\partial\vec{H}/\partial z : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$). Alors $\Omega(t_f)$ est un ouvert et l'application*

$$\begin{array}{rcl} z(t_f, .) : \Omega(t_f) & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ z_0 & \longmapsto & z(t_f, z_0) \end{array}$$

est dérivable et sa dérivée est la solution du sytème de Cauchy linéaire appelé équations variationnelles suivant :

$$(VAR) \begin{cases} \dot{\delta z}(t) = \frac{\partial \vec{H}}{\partial z}(t, z(t, z_0))\delta z(t) \\ \delta z(0) = I \end{cases}$$

Démonstration
Formellement on a

$$z(t_f, z_0) = z_0 + \int_0^{t_f} \vec{H}(t, z(t, z_0))dt$$

Donc, si $z(t_f,.)$ est dérivable on a

$$\frac{\partial z}{\partial z_0}(t_f,z_0) = I + \int_0^{t_f} \frac{\partial \vec{H}}{\partial z}(t,z(t,z_0))\frac{\partial z}{\partial z_0}(t_f,z_0)dt.$$

Ce qui signifie bien que cette dérivée est solution du problème de Cauchy (EQ). Il reste à démontrer que la dérivée existe. Pour cela voir [3]

□

2.2 Approximation numérique de la dérivée

2.2.1 Différences finies externes

$$\frac{\partial z}{\partial z_{0,j}}(t_f,z_0) \approx \frac{1}{\eta}(z(t_f,z_0+\eta e_j) - z(t_f,z_0)),$$

où $(e_1,\ldots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

2.3 Équation variationnelle

$\frac{\partial z}{\partial z_{0,j}}(t_f,z_0)$ est la solution $\delta z_j(t_f)$ du système de Cauchy

$$(EQ_j)\begin{cases} \dot{z}(t) = \vec{H}(t,z(t)) \\ \dot{\delta z_j}(t) = \frac{\partial \vec{H}}{\partial z}(t,z(t))\delta z_j(t) \\ z(0) = z_0 \\ \delta z_j(0) = e_j \end{cases}$$

2.3.1 Différentiation interne de Bock

Nous allons approximer par différence finies le deuxième membre de l'équation variationnelle [1]. On a

$$\vec{H}(t,z(t)+\eta\delta z_j(t)) = \vec{H}(t,z(t)) + \frac{\partial \vec{H}}{\partial z}(t,z(t))\eta\delta z_j(t) + o(\eta\delta z_j(t))$$

On approxime alors dans les équations variationnelles

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial z}(t,z(t))\delta z_j(t) \approx \frac{1}{\eta}(\vec{H}(t,z(t)+\eta\delta z_j(t)) - \vec{H}(t,z(t))).$$

On résout donc

$$(IND_j)\begin{cases} \dot{z}(t) = \vec{H}(t,z(t)) \\ \dot{\delta z_j}(t) = \frac{1}{\eta}(\vec{H}(t,z(t)+\eta\delta z_j(t)) - \vec{H}(t,z(t))) \\ z(0) = z_0 \\ \delta z_j(0) = e_j. \end{cases}$$

2.4 Interfaces

On donne ci-après les interfaces pour la fonction de tir et le deuxième membre de l'edo dans le cas du calcul de la dérivée par les équations variationnelles.

— Deuxième membre des équations variationnelles

```
%   Description
%
%       Computes the second member of the variational system associated to H.
%
%-------------------------------------------------------------------------------------------
%
%   Matlab Usage
%
%       hvdhv = dhvfun(t, zdz, par)
%
%   Inputs
%
%       t      -  real, t = time
%       zdz    -  real vector of dimension 2n
%                 = z and delta z_2 (second column of the jacobian matrix)
%                 in one vector
%       par  -  real vector, parameters, par=[] if no parameters
%
%   Outputs
%
%       hvdhv   -  real vector of dimension 2n, hamiltonian vector field  and second member of the
%                  variational equation in one vector
%
%-------------------------------------------------------------------------------------------
```

— expdhvfun

```
%-------------------------------------------------------------------------------------------
%
%   Description
%
%       Computes the chronological exponential of the variational system associated to hv.
%
%-------------------------------------------------------------------------------------------
%
%   Matlab Usage
%
%       [tout,zdz] = expdhvfun(tspan, z0dz0, options, par)
%
%   Inputs
%
%       tspan   - real row vector of dimension 2, tspan = [t0 tf]
%       z0dz0   - real vector, initial state and initial condition for the variational equation
%       options - options for numerical integration
%       par     - real vector, parameters, par=[] if no parameters
%
%   Outputs
%
%       tout    - real row vector, time at each integration step
%       zdz     - real matrix, exphv(:,i) : flow at tout(i) for the variational system
%
%-------------------------------------------------------------------------------------------
```

— Fonction de tir

```
%-------------------------------------------------------------------------------------------
%
%   Description
```

```
%
%       Computes the shooting function and the Jacobian of the shooting function
%
%
%--------------------------------------------------------------------------------------------
%
%    Matlab Usage
%
%       [s, J] = sfun(y,options,par)
%
%    Inputs
%
%       y       - real vector, shooting variable
%       options - options for numerical integration
%       par     - real vector, par=[] if no parameters
%
%    Outputs
%
%       s       - real vector, shooting value
%       J       - real matrix, Jacobian of the shooting function
%
%--------------------------------------------------------------------------------------------
```

Pour la différentiation interne de Bock on a les mêmes interfaces, seul change les noms des fonctions.

2.5 Travail demandé

On prend toujours $\varepsilon = 0.01$, et les paramètres par défaut pour l'intégration numérique. Attention, ici on a $z_0 = {}^t(x_0, p_0) = {}^t(x_0, y)$.

1. Visualiser la dérivée de la fonction de tir calculée par différences finies externes avec $Tol = AbsTol = RelTol = 1.e-4$:
   (a) et $\eta = Tol$;
   (b) et $\eta = \sqrt{Tol}$;
   (c) les équations variationnelles.
2. Toujours pour $y^{(0)} = 0.38$ et $Tol = AbsTol = RelTol = 1.e-4$ et en utilisant le vecteur d'options de `fsolve, OPTIONS=optimset('Display','iter','Jacobian','on')`, résoudre l'équation $S_\varepsilon(y) = 0$ en calculant la dérivée par
   (a) différences finies externes avec $\eta = \sqrt{Tol}$;
   (b) les équations variationnelles.
3. Différentiation interne de Bock.
   (a) Visualiser la dérivée de la fonction de tir calculée par la différentiation interne avec $\eta = \sqrt{eps_{mach}}$.
   (b) Toujours pour $y^{(0)} = 0.38$ et $Tol = AbsTol = RelTol = 1.e-4$ et en utilisant le vecteur d'options de `fsolve, OPTIONS=optimset('Display','iter','Jacobian','on')`, résoudre l'équation $S_\varepsilon(y) = 0$ en calculant la dérivée par la différentiation interne de Bock avec $\eta = \sqrt{eps_{mach}}$.

Références

[1] H.G. Bock. Numerical treatment of inverse problems in chemical reaction kinetics. In K.H. Hebert, P. Deuflhard, and W. Jäger, editors, *Modelling of chemical reaction systems*, volume 18 of *Springer series in Chem. Phys.*, pages 102–125, 1981.

[2] Joseph Gergaud. *Équations différentielles ordinaires.* Cours polycopiés de l'Université de Toulouse, INP de Toulouse, 2011.

[3] C. Wagschal. *Fonctions holomorphes, Équations différentielles.* Hermann, 2003.