TP Méthodes directes et semi-directes

Gergaud Joseph

1 Introduction

Les méthodes directes et semi-directes consistent à transformer directement le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non-linéaire avec contraintes. Concernant les méthodes directes, nous n'étudierons ici que les méthodes de discrétisation. Pour les méthodes dites de collocation, voir [**?**]

On considère ici que le problème de contrôle optimal est mis sous la formulation de Mayer.

$$
(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll}
Min \quad J(x,u) = g(x(t_f)) & \\
\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \quad pp \text{ dans } [t_0,t_f] \text{ fixé} & \text{équation d'état} \\
c_x(x(t)) \leq 0 & \text{contraintes sur l'état} \\
c_u(u(t)) \leq 0 & \text{contraintes sur le contrôle} \\
h(x(t_0),x(t_f)) = 0 & \text{contraintes terminales,}
\end{array} \right.
$$

où l'état est de dimension n et le contrôle de dimension m.

2 Méthodes semi-directes

2.1 Présentation des méthodes semi-directes

On considère une subdivision $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_f$. On paramétrise le contrôle sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$. On a donc

$$
u(t) = u(t, \alpha_i) \quad t \in [t_i, t_{i+1}[,
$$

où $\alpha_i \in \mathbf{R}^q$. On peut par exemple prendre le contrôle constant sur chaque intervalle $u_i(t) = \alpha_i$ $(q = 1)$ ou linéaire par morceaux pour chacune de ses composantes $u_i(t) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}(t - t_i)$ $(q = 2)$. Si on se donne $x_0 = x(t_0)$ et les $(\alpha_i)_{i=0,N-1}$, on peut alors calculer $x(t_1, x_0, \alpha_0)$ solution de

$$
(IVP_0) \left\{ \begin{array}{l}
\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t,\alpha_0)) \quad t \in [t_0,t_1] \\
x(t_0) = x_0,
\end{array} \right.
$$

puis par récurrence $x(t_{i+1}, x_0, \alpha_0, \ldots, \alpha_i)$ solution de

$$(IVP_i) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t, \alpha_i)) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ x(t_i) = x(t_i, x_0, \alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}). \end{cases}$$

Le problème de contrôle optimal se transforme alors en un problème d'optimisation non-linéaire en dimension finie

$$(PNL_1) \begin{cases} Min \quad g(x(t_N, x_0, \alpha)) \\ c_x(x(t_i, x_0, \alpha)) \leq 0 \quad i = 0, \ldots, N \\ c_u(u(t_i, \alpha) \leq 0 \quad i = 0, \ldots, N-1 \\ h(x_0, x(t_N, x_0, \alpha)) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Remarque 2.1.

1. On a posé $x(t_i, x_0, \alpha) = x(t_i, x_0, \alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1})$.
2. En pratique le calcul des $x(t_i, x_0, \alpha)$ se fait par intégration numérique (voir `help ode23` pour le passage de paramètres de α dans l'intégration numérique).

2.2 Travail demandé

On considère le problème simple de contrôle optimal suivant :

$$(P) \begin{cases} Min \int_0^2 u(t)^2 dt \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ |u(t)| \leq 1 \\ x(0) = x^0 = 0 \\ x(2) = x^f = 0.5 \end{cases}$$

Résoudre le problème (P) par une méthode semi-directe. On prendra :
– le cas de contrôles constants par morceaux ;
– 0 sur toutes les coordonnées pour le point de départ ;
– l'intégrateur `ode23` pour l'intégrateur numérique ;
– une grille uniforme et $N = 5, 10, 30$
Fonction `Matlab: fmincon`

3 Méthodes directes

3.1 Présentation des méthodes directes

L'idée consiste alors tout simplement à discrétiser l'équation d'état via un schéma numérique. On se donne donc une subdivision $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_f$ et un schéma numérique d'intégration. Considérons par exemple un schéma de Runge-Kutta à s étages. Soit

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array} \quad \text{avec} \quad c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij},$$

on a alors sur l'intervalle $[t_l, t_{l+1}]$

$$k_{li} = f(t_l + c_i h_l, x_l + h_l \sum_{j=1}^{s} k_{lj}, u_{li}) \quad l = 0, \dots, N-1 \quad i = 1, \dots, s \tag{2}$$

$$x_{l+1} = x_l + h_l \sum_{j=1}^{s} b_j k_{lj} \tag{3}$$

où u_{li} est une approximation de $u(t_l + c_i h_l)$.

On obtient alors le problème d'optimisation en dimension finie

$$(PNL_2) \begin{cases} Min \quad g(x_N) \\ k_{li} - f(t_l + c_i h_l, x_l + h_l \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_{lj}, u_{li}) = 0 \quad l = 0, \dots, N-1 \quad i = 1, \dots, s \\ x_{l+1} - x_l - h_l \sum_{j=1}^{s} b_j k_{lj} = 0 \quad l = 1, \dots, N \\ c_x(x_l) \leq 0 \quad l = 0, \dots, N \\ c_u(u_{li}) \leq 0 \quad l = 0, \dots, N-1 \quad i = 1, \dots s \\ h(x_0, x_N) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

3.2 Travail demandé

On considère le problème simple de contrôle optimal suivant :

$$(P) \begin{cases} Min \int_0^2 u(t)^2 dt \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ |u(t)| \leq 1 \\ x(0) = x^0 = 0 \\ x(2) = x^f = 0.5 \end{cases}$$

Résoudre le problème (P) par une méthode directe en utilisant comme schéma :

1. le schéma d'Euler : $x_{l+1} - x_l - h_l f(t_l, x_l, u_l) = 0$;
2. le schéma des trapèzes :
   $x_{l+1} - x_l - (h_l/2)(f(t_l, x_l, u_l) + f(t_{l+1}, x_{l+1}, u_{l+1}) = 0$;

On utilisera la fonction `Matlab` `fmincon`, on prendra comme point de départ 0 sur toutes les coordonnées et $N = 5, 10, 30$.