TP7-8: Résolution des problèmes Bang-Bang

GERGAUD Joseph

1 Cas simple

1.1 Problème PMP

On s'intéresse ici au problème simple suivant :

$$(P_1)\left\{\begin{array}{l} Min \int_0^2 (|u(t)|)dt \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ |u(t)| \leq 1 \\ x(0) = x^0 = 0 \\ x(2) = x^f = 0.5. \end{array}\right.$$

Le Principe du Maximum de Pontriaguine appliqué à ce problème donne alors le problème aux deux bouts suivant :

$$(BVP_1)\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ \dot{p}(t) = p(t) \\ x(0) = x^0 = 0 \\ x(2) = x^f = 0.5, \end{array}\right.$$

avec

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |p(t)| < 1 \\ -\text{sign}(p(t)) & \text{si } |p(t)| > 1 \\ \in [-1, 0] & \text{si } p(t) = 1 \\ \in [0, 1] & \text{si } p(t) = -1. \end{cases}$$

1.2 Résolution par tir multiple

Sachant que sur ce petit problème le contrôle optimal est égal à

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ -\text{sign}(p(t)) & \text{si } t > t_1, \end{cases}$$

on peut trouver la solution en recherchant un zéro de la fonction de tir multiple

$$\begin{array}{rcl} S : \mathbf{R}^5 & \longrightarrow & \mathbf{R}^5 \\ \begin{pmatrix} t_1 \\ z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} z_{01} \\ z(t_1, t_0, z_0) - z_1 \\ z_1(t_f, t_1, z_1) - 0.5 \\ z_2(t_1, t_0, z_0) + 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

où $z_i = \begin{pmatrix} x_i & p_i \end{pmatrix}^T$ et $z(t_i, t_{i-1}, z_{i-1})$ est la solution du système différentiel en t_i avec la condition initiale $z(t_{i-1}) = z_{i-1}$.

1.3 Détermination de la structure du contrôle optimal

L'idée pour déterminer la structure de la solution optimale est de perturber ce problème par

$$(P_\varepsilon)\begin{cases} Min \int_0^2 (|u(t)| - \varepsilon(\ln|u(t)| + \ln(1-|u(t)|)))dt \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ |u(t)| < 1 \\ x(0) = x^0 = 0 \\ x(2) = x^f = 0.5 \end{cases}$$

En résolvant ce problème pour $\varepsilon = 0.001$ on obtient le contrôle de la figure 1

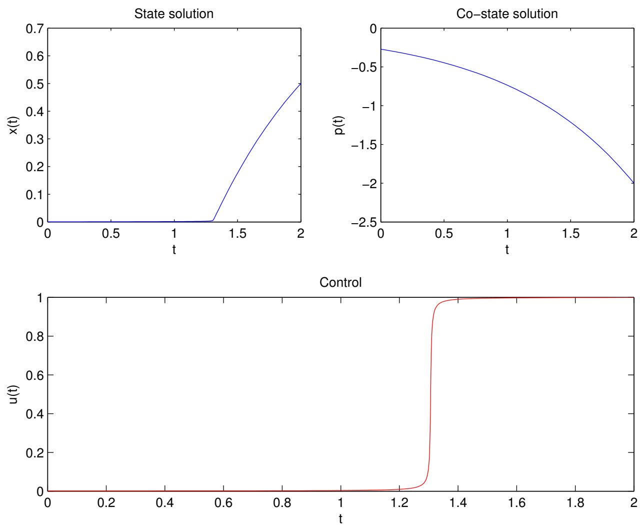

FIGURE 1 – *Contrôle optimal pour le problème* (P_1) *avec* $\varepsilon = 0.001$.

Ceci nous permet donc d'initialiser l'instant de commutation t_1 et le point de départ pour le tir mutiple.

1.4 Tir multiple et *hampath*

Voici quelques indications pour résoudre via le tir multiple les problèmes de contrôle optimal avec *hampath* :

- nbarc indique le nombre d'arcs.
- iarc indique le numéro de l'arc pour l'évaluation du contrôle et de l'hamiltonien.
- Dans `efun.f90`
  - `ti`$= \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{\texttt{nbarc}-1} & t_f \end{pmatrix}$;
  - `zi`$= \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & \dots & z_{\texttt{nbarc}-1} \end{pmatrix}$;
  - `zi(:,i)`$= z_{i-1}$, condition initiale en t_{i-1} ;
  - `expzi(:,i)`$= z(t_i, t_{i-1}, z_{i-1})$.

2 Transfert orbital avec maximisation de la masse finale

2.1 problème

On s'intéresse ici au cas du transfert optimal 2D à temps final fixé, à masse variable et avec la maximisation de la masse final $m(t_f)$:

$$
(P)\left\{\begin{array}{l}
\text{Min } \int_0^{t_f} ||u(t)||dt \\
\dot{x_1}(t) = x_3(t) \\
\dot{x_2}(t) = x_4(t) \\
\dot{x_3}(t) = -\dfrac{\mu.x_1(t)}{||r(t)||^3} + \dfrac{\mathrm{T_{max}}}{m(t)}u_1(t) \\
\dot{x_4}(t) = -\dfrac{\mu.x_2(t)}{||r(t)||^3} + \dfrac{\mathrm{T_{max}}}{m(t)}u_2(t) \\
\dot{m}(t) = -\beta \mathrm{T_{max}}||u(t)|| \\
x_1(0) = x_1^0 \\
x_2(0) = x_2^0 \\
x_3(0) = x_3^0 \\
x_4(0) = x_4^0 \\
m(0) = m^0 \\
x_1(t_f) = x_1^f \\
x_2(t_f) = x_2^f \\
x_3(t_f) = x_3^f \\
x_4(t_f) = x_4^f \\
||u(t)|| \leq 1 \\
\quad \text{avec } r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} \quad u(t) = (u_1(t), u_2(t))
\end{array}\right.
$$

2.2 Unités et valeurs des constantes

Les unités choisies sont le kilomètre pour les distances et l'heure pour les temps.
- $m^0 = 2000\ kg$;
- $\gamma_{max} = 388.8\ km/h^2 = \frac{\mathrm{T_{max}}}{m_0} = \frac{60.3600^2}{2000.10^3}$. Ceci correspond à une accélération de $60N$.
- $t_f = 3t_{f min} = 11.733416535598224$;
- $\mu = 5.165862091200000.10^{12}\ km^3.h^{-2}$;
- Conditions initiales
  - $x_1^0 = -44000$;
  - $x_2^0 = 0$;
  - $x_3^0 = 0$;
  - $x_4^0 = -10279$.
- Conditions terminales :
  - $r_f = 42165$ km ;
  - $\theta = 0$;
  - $x_1^f = r_f \cos(\theta)$;
  - $x_2^f = r_f \sin(\theta)$;
  - $x_3^f = -\sqrt{\frac{\mu}{r_f^3}} x_2^f$;
  - $x_4^f = \sqrt{\frac{\mu}{r_f^3}} x_1^f$.

2.3 Détermination de la structure

On résoudra tout d'abord le problème de transfert avec le coût suivant :

$$Min \int_0^{t_f} (||u(t)|| - \varepsilon(\ln(||u(t)||) + \ln(1 - ||u(t)||)))dt,$$

pour $\varepsilon = 1, 0.1, 0.01, 0.001$.

On prendra comme point de départ pour $\varepsilon = 1$

$$\texttt{zi0} = 1.0e+04 \begin{pmatrix} -4.400000000000000 \\ 0 \\ 0 - 1.027900000000000 \\ 0.200000000000000 \\ -0.000000035218369 \\ -0.000000010980009 \\ -0.000000123244025 \\ 0.000000030052016 \\ 0.000000069311242 \end{pmatrix}.$$

On donne

$$\varphi(0, \texttt{zi0}) = 1.0e+04 \begin{pmatrix} 0 \\ -1.027900000000000 \\ 0.283362689141183 \\ -0.004030937496114 \\ 0 \\ 0.000000014947916 \\ 0.000000001822462 \\ 0.000000035218369 \\ 0.000000010980009 \\ -0.000000010792405 \end{pmatrix}$$

et

$$S(\texttt{zi0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.625576420163270 \\ -1.438358594367970 \\ 0.767245550477924 \\ -0.240657136429945 \\ -0.000000056551782 \end{pmatrix}$$

2.4 Résolution par tir multiple

Résoudre le problème de transfert avec maximisation de la masse finale

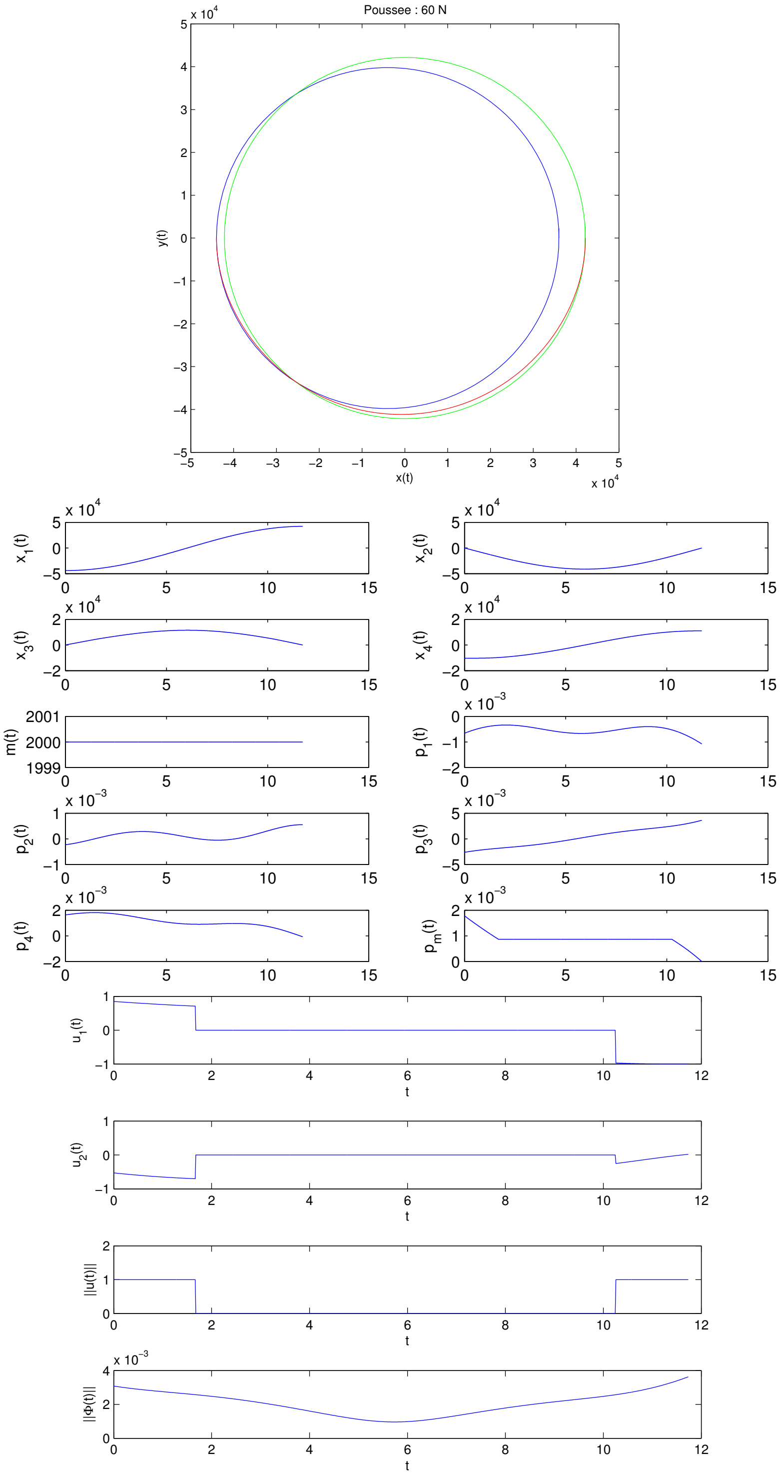

FIGURE 2 – *Solution du problème de maximisation de la masse finale.*

Annexe `flag` en sortie de `ssolve`

```
c          info = 0   improper input parameters.
c
c          info = 1   relative error between two consecutive iterates
c                     is at most xtol.
c
c          info = 2   number of calls to fcn with iflag = 1 has
c                     reached maxfev.
c
c          info = 3   xtol is too small. no further improvement in
c                     the approximate solution x is possible.
c
c          info = 4   iteration is not making good progress, as
c                     measured by the improvement from the last
c                     five jacobian evaluations.
c
c          info = 5   iteration is not making good progress, as
c                     measured by the improvement from the last
c                     ten iterations.
```