TP : problème de transfert d'orbite 2D, $Min\ t_f$

Olivier Cots, Joseph Gergaud & Richard Épenoy

1 Introduction

Le système considéré est un satellite de masse fixée m libéré par une fusée dans le plan de l'équateur ; l'orbite initiale du satellite est une ellipse de forte excentricité 1. L'objectif de ce travail est de réaliser le transfert en temps minimal, puis avec maximisation de la masse finale de cette orbite elliptique à une orbite circulaire géostationnaire.

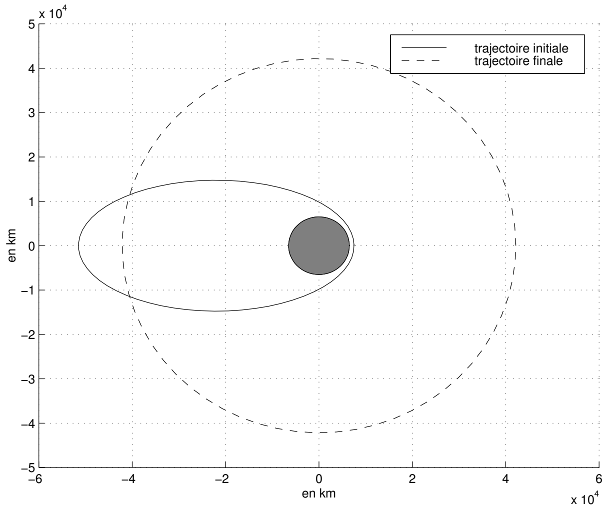

Figure 1 – Transfert orbital 2D

2 Problème en temps minimal

2.1 Modélisation du problème

Le système est soumis à la force d'attraction terrestre $\overrightarrow{F_{gr}}$, toutes les autres forces de perturbation sont négligées et le contrôle du satellite se fait à l'aide d'un moteur ionique situé à l'arrière générant une accélération $\overrightarrow{u}$. On

suppose la masse m du satellite constante.
Les calculs sont effectués dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où la terre est représentée par le point O et le satellite par le point M. L'équation vérifiée par le système est obtenue par le principe fondamental de la dynamique. Le critère à minimiser est le temps final t_f, on suppose que l'instant initial est $t_0 = 0$ et que la poussée générée par le moteur est bornée. Le problème de contrôle optimal obtenu est le suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } t_f \\ \ddot{\overrightarrow{r}} = \dfrac{\overrightarrow{F_{gr}}}{m} + \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{r}(t_0) = \overrightarrow{r}_0 \\ \dot{\overrightarrow{r}}(t_0) = \dot{\overrightarrow{r}}_0 \\ ||\overrightarrow{r}(t_f)|| = r_f \\ ||\dot{\overrightarrow{r}}(t_f)|| = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_f}} \\ (\overrightarrow{r}(t_f)|\dot{\overrightarrow{r}}(t_f)) = 0 \\ ||u(t)|| \leq \gamma_{max} \end{array} \right.$$

Notations

$\overrightarrow{\gamma} = \dfrac{\overrightarrow{F_{gr}}}{m} = -\mu \dfrac{\overrightarrow{r}}{\lvert\lvert\overrightarrow{r}\rvert\rvert^3}$	accélération gravitationnelle due à la terre
μ	constante gravitationnelle
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$	vecteur terre satellite
$\overrightarrow{r_0}$	vecteur terre satellite à l′instant initial
r_f	norme vecteur terre satellite à l′instant final
$\dot{\overrightarrow{r}}$	vecteur vitesse
$\ddot{\overrightarrow{r}}$	vecteur accélération

Remarque 2.1. *Les conditions finales sur l'état signifient que le point d'arrivée est sur la bonne orbite avec la bonne vitesse, mais ne précisent pas la position sur cette orbite.*

2.2 Problème à résoudre

En posant $\overrightarrow{r} = (x_1, x_2)$ et $\dot{\overrightarrow{r}} = (x_3, x_4)$, la résolution du problème précédent se ramène à celle de :

$$
(P_1) \left\{
\begin{array}{l}
\text{Min } t_f \\
\quad \dot{x_1}(t) = x_3(t) \\
\quad \dot{x_2}(t) = x_4(t) \\
\quad \dot{x_3}(t) = (-\dfrac{\mu.x_1(t)}{||r(t)||^3} + u_1(t)) \\
\quad \dot{x_4}(t) = (-\dfrac{\mu.x_2(t)}{||r(t)||^3} + u_2(t)) \\
\quad x_1(0) = x_{0,1} \\
\quad x_2(0) = x_{0,2} \\
\quad x_3(0) = x_{0,3} \\
\quad x_4(0) = x_{0,4} \\
\quad x_1^2(t_f) + x_2^2(t_f) - r_f^2 = 0 \\
\quad x_3(t_f) = -\sqrt{\dfrac{\mu}{r_f^3}} x_2(t_f) \\
\quad x_4(t_f) = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_f^3}} x_1(t_f) \\
\quad ||u(t)|| \leq \gamma_{max} \\
\qquad \text{avec } r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} \qquad u(t) = (u_1(t), u_2(t))
\end{array}
\right.
$$

Remarque 2.2. *Dans le cas de l'orbite géostationnaire, qui est le cas traité ici, les 3 conditions terminales sur l'état sont équivalentes aux conditions terminales précédentes.*

Unités et valeurs des constantes

Les unités choisies sont le kilomètre pour les distances et l'heure pour les temps.

$\mu = 5.165862091200000.10^{12}\ km^3.h^{-2}$
$r_f = 42165\ km$
$\gamma_{max} = 388.8\ km/h^2 (= \frac{F_{max}}{m} = \frac{60.3600^2}{2000.10^3})$ correspond à une accélération de 60N et à une masse de 2000 kg

2.3 Travail demandé

1. Transformer le problème de contrôle optimal (P_1) en un problème aux deux bouts en utilisant le principe du maximum de Pontriaguine.

On donne ci-après les équations adjointes

$$\left\{\begin{array}{l}
\dot{p}_1(t) = \left(\dfrac{\mu}{||r(t)||^3} - \dfrac{3\mu x_1^2(t)}{||r(t)||^5}\right) p_3(t) - \dfrac{3\mu x_1(t) x_2(t)}{||r(t)||^5} p_4(t) \\
\dot{p}_2(t) = -\dfrac{3\mu x_1(t) x_2(t)}{||r(t)||^5} p_3(t) + \left(\dfrac{\mu}{||r(t)||^3} - \dfrac{3\mu x_2^2(t)}{||r(t)||^5}\right) p_4(t) \\
\dot{p}_3(t) = -p_1(t) \\
\dot{p}_4(t) = -p_2(t)
\end{array}\right.$$

2. Écrire la fonction de tir associée au problème aux deux bouts.
3. Résoudre le problème aux deux bouts obtenu pour le point de départ suivant :
   $x_{0,1} = -44000\ km$ $\quad x_{0,2} = 0\ km$
   $x_{0,3} = 0\ km/h$ $\quad x_{0,4} = -10279\ km/h$
   On note $y = (p(t_0), t_f)$ l'inconnue de la fonction de tir. On prendra comme point de départ pour `fsolve` $y^{(0)} = (10^{-3}\ 4.10^{-4}\ 10^{-3}\ 10^{-4}\ \ 4)$
4. On donne pour vérifier les calculs :

$$\varphi(t_0, z_0) = 10^4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1.027900000000000 \\ 0.305518765542141 \\ 0.003868704595536 \\ -0.000000012128715 \\ 0.000000000606436 \\ -0.000000100000000 \\ -0.000000040000000 \end{pmatrix}$$

   et pour les options par défauts de $RelTol = 1.e{-3}$ et $AbsTol = 1.e{-6}$

$$S(y^{(0)}) = 10^7 \begin{pmatrix} 8.402066626446199 \\ -0.000068291955523 \\ 0.000014242216276 \\ 0.000000902867724 \\ -0.000000205266785 \end{pmatrix}.$$

5. Réaliser les graphiques des états, états adjoints et contrôle solutions ainsi que la trajectoire dans le plan (on récupérera le fichier `orbiteOf.m` pour tracer les orbites initiale et terminale).