Projet: Problème de transfert d'orbite 2D, $Min\ t_f$ et $Max\ m(t_f)$

Olivier Cots, Joseph Gergaud & Richard Épenoy

1 Introduction

Le système considéré est un satellite de masse fixée m libéré par une fusée dans le plan de l'équateur ; l'orbite initiale du satellite est une ellipse de forte excentricité 1. L'objectif de ce travail est de réaliser le transfert en temps minimal, puis avec maximisation de la masse finale de cette orbite elliptique à une orbite circulaire géostationnaire.

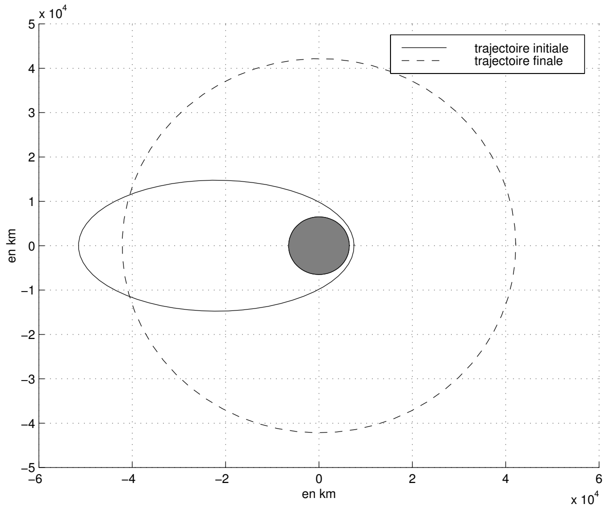

Figure 1 – Transfert orbital 2D

2 Problème en temps minimal

2.1 Modélisation du problème

Le système est soumis à la force d'attraction terrestre $\overrightarrow{F_{gr}}$, toutes les autres forces de perturbation sont négligées et le contrôle du satellite se fait à l'aide d'un moteur ionique situé à l'arrière générant une accélération $\overrightarrow{u}$. On

suppose la masse m du satellite constante.
Les calculs sont effectués dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où la terre est représentée par le point O et le satellite par le point M. L'équation vérifiée par le système est obtenue par le principe fondamental de la dynamique. Le critère à minimiser est le temps final t_f, on suppose que l'instant initial est $t_0 = 0$ et que la poussée générée par le moteur est bornée. Le problème de contrôle optimal obtenu est le suivant :

$$
(P)\left\{\begin{array}{l}
\text{Min } t_f \\
\ddot{\overrightarrow{r}} = \dfrac{\overrightarrow{F_{gr}}}{m} + \overrightarrow{u} \\
\overrightarrow{r}(t_0) = \overrightarrow{r}_0 \\
\dot{\overrightarrow{r}}(t_0) = \dot{\overrightarrow{r}}_0 \\
||\overrightarrow{r}(t_f)|| = r_f \\
||\dot{\overrightarrow{r}}(t_f)|| = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_f}} \\
(\overrightarrow{r}(t_f)|\dot{\overrightarrow{r}}(t_f)) = 0 \\
||u(t)|| \leq \gamma_{max}
\end{array}\right.
$$

Notations

$\overrightarrow{\gamma} = \dfrac{\overrightarrow{F_{gr}}}{m} = -\mu\dfrac{\overrightarrow{r}}{\lvert\lvert\overrightarrow{r}\rvert\rvert^3}$	accélération gravitationnelle due à la terre
μ	constante gravitationnelle
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$	vecteur terre satellite
$\overrightarrow{r_0}$	vecteur terre satellite à l'instant initial
r_f	norme vecteur terre satellite à l'instant final
$\dot{\overrightarrow{r}}$	vecteur vitesse
$\ddot{\overrightarrow{r}}$	vecteur accélération

Remarque 2.1. *Les conditions finales sur l'état signifient que le point d'arrivée est sur la bonne orbite avec la bonne vitesse, mais ne précisent pas la position sur cette orbite.*

2.2 Problème à résoudre

En posant $\overrightarrow{r} = (x_1, x_2)$ et $\dot{\overrightarrow{r}} = (x_3, x_4)$, la résolution du problème précédent se ramène à celle de :

$$
(P_1) \left\{
\begin{array}{l}
\text{Min } t_f \\
\dot{x_1}(t) = x_3(t) \\
\dot{x_2}(t) = x_4(t) \\
\dot{x_3}(t) = (-\dfrac{\mu.x_1(t)}{||r(t)||^3} + u_1(t)) \\
\dot{x_4}(t) = (-\dfrac{\mu.x_2(t)}{||r(t)||^3} + u_2(t)) \\
x_1(0) = x_{0,1} \\
x_2(0) = x_{0,2} \\
x_3(0) = x_{0,3} \\
x_4(0) = x_{0,4} \\
x_1^2(t_f) + x_2^2(t_f) - r_f^2 = 0 \\
x_3(t_f) = -\sqrt{\dfrac{\mu}{r_f^3}} x_2(t_f) \\
x_4(t_f) = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_f^3}} x_1(t_f) \\
||u(t)|| \leq \gamma_{max} \\
\quad \text{avec } r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} \qquad u(t) = (u_1(t), u_2(t))
\end{array}
\right.
$$

Remarque 2.2. *Dans le cas de l'orbite géostationnaire, qui est le cas traité ici, les 3 conditions terminales sur l'état sont équivalentes aux conditions terminales précédentes.*

Unités et valeurs des constantes

Les unités choisies sont le kilomètre pour les distances et l'heure pour les temps.

$\mu = 5.165862091200000.10^{12}\ km^3.h^{-2}$
$r_f = 42165\ km$
$\gamma_{max} = 388.8\ km/h^2 (= \frac{F_{max}}{m} = \frac{60.3600^2}{2000.10^3})$ correspond à une accélération de 60N et à une masse de 2000 kg

2.3 Travail demandé

1. Récupérer le fichier `/home/gergaud/Public/orbite0f.m`.
2. Transformer le problème de contrôle optimal (P_1) en un problème aux deux bouts en utilisant le principe du maximum de Pontriaguine.

3. Écrire la fonction de tir associée au problème aux deux bouts.
4. Résoudre le problème aux deux bouts obtenu pour le point de départ suivant :
   $x_{0,1} = -44000\ km$ $\qquad x_{0,2} = 0\ km$
   $x_{0,3} = 0\ km/h$ $\qquad x_{0,4} = -10279\ km/h$
   On note $y = (p(t_0), t_f)$ l'inconnue de la fonction de tir. On prendra comme point de départ pour `fsolve` $y^{(0)} = (10^{-3}\ 4.10^{-4}\ 10^{-3}\ 10^{-4}\ \ 4)$

5. On donne pour vérifier les calculs :

$$\varphi(t_0, z_0) = 10^4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1.027900000000000 \\ 0.305518765542141 \\ 0.003868704595536 \\ -0.000000012128715 \\ 0.000000000606436 \\ -0.000000100000000 \\ -0.000000040000000 \end{pmatrix}$$

   et pour les options par défauts de $RelTol = 1.e{-}3$ et $AbsTol = 1.e{-}6$

$$S(y^{(0)}) = 10^7 \begin{pmatrix} 8.402066626446199 \\ -0.000068291955523 \\ 0.000014242216276 \\ 0.000000902867724 \\ -0.000000205266785 \end{pmatrix}.$$

6. Réaliser les graphiques des états, états adjoints et contrôle solutions ainsi que la trajectoire dans le plan.

3 Problème avec maximisation de la masse finale

3.1 Problème à résoudre

On s'intéresse ici au cas du transfert optimal 2D à temps final fixé, à masse variable et avec la maximisation de la masse final $m(t_f)$:

$$(P_2)\begin{cases} \text{Min } \int_0^{\text{t}_\text{f}} ||\text{u(t)}||\text{dt} \\ \dot{x_1}(t) = x_3(t) \\ \dot{x_2}(t) = x_4(t) \\ \dot{x_3}(t) = -\dfrac{\mu.x_1(t)}{||r(t)||^3} + \dfrac{\text{T}_{\text{max}}}{m(t)}u_1(t) \\ \dot{x_4}(t) = -\dfrac{\mu.x_2(t)}{||r(t)||^3} + \dfrac{\text{T}_{\text{max}}}{m(t)}u_2(t) \\ \dot{m}(t) = -\beta\text{T}_{\text{max}}||u(t)|| \\ x_1(0) = x_{0,1} \\ x_2(0) = x_{0,2} \\ x_3(0) = x_{0,3} \\ x_4(0) = x_{0,4} \\ m(0) = m_0 \\ x_1(t_f) = x_{f,1} \\ x_2(t_f) = x_{f,2} \\ x_3(t_f) = x_{f,3} \\ x_4(t_f) = x_{f,4} \\ ||u(t)|| \leq 1 \\ \quad \text{avec } r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} \qquad u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \end{cases}$$

3.2 Unités et valeurs des constantes

Les unités choisies sont le kilomètre pour les distances et l'heure pour les temps.

- $m^0 = 2000\ kg$;
- $\gamma_{max} = 388.8\ km/h^2 = \frac{\text{T}_{\text{max}}}{m_0} = \frac{60.3600^2}{2000.10^3}$. Ceci correspond à une accélération de $60N$.
- $t_f = 3t_{f\,min} = 11.733416535598224$;
- $\mu = 5.165862091200000.10^{12}\ km^3.h^{-2}$;
- $\beta = 0$;
- Conditions initiales
  - $x_1^0 = -44000$;
  - $x_2^0 = 0$;
  - $x_3^0 = 0$;
  - $x_4^0 = -10279$.
- Conditions terminales :
  - $r_f = 42165$ km ;
  - $\theta = 0$;
  - $x_1^f = r_f \cos(\theta)$;
  - $x_2^f = r_f \sin(\theta)$;
  - $x_3^f = -\sqrt{\frac{\mu}{r_f^3}} x_2^f$;

— $x_4^f = \sqrt{\frac{\mu}{r_f^3}} x_1^f$.

3.3 Détermination de la structure

On résoudra tout d'abord le problème de transfert avec le coût suivant :

$$Min \quad \int_0^{t_f} (||u(t)|| - \varepsilon(\ln(||u(t)||) + \ln(1 - ||u(t)||)))dt,$$

pour $\varepsilon = 1, 0.1, 0.01, 0.009$. 1 0.1 0.01 0.009 On prendra comme point de départ pour $\varepsilon = 1$

$$p_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On donne

$$\varphi(0, z_0) = 1.0e + 04 \begin{pmatrix} 0 \\ -1.027900000000000 \\ 0.293824199570075 \\ 0.026992479983298 \\ 0 \\ -0.000001212871453 \\ 0.000000606435726 \\ 0 \\ 0 \\ 0.000002699247998 \end{pmatrix}$$

et

Pour les options d'intégration numérique : $RelTol = 1e{-}8, AbsTol = 1e{-}14,$

$$S(p_0^{(0)}) = 1.e + 04 \begin{pmatrix} -1.228497300354098 \\ 3.658537881215989 \\ -0.486373863124361 \\ 0.093063841391521 \\ 0.000117961175181 \end{pmatrix}.$$

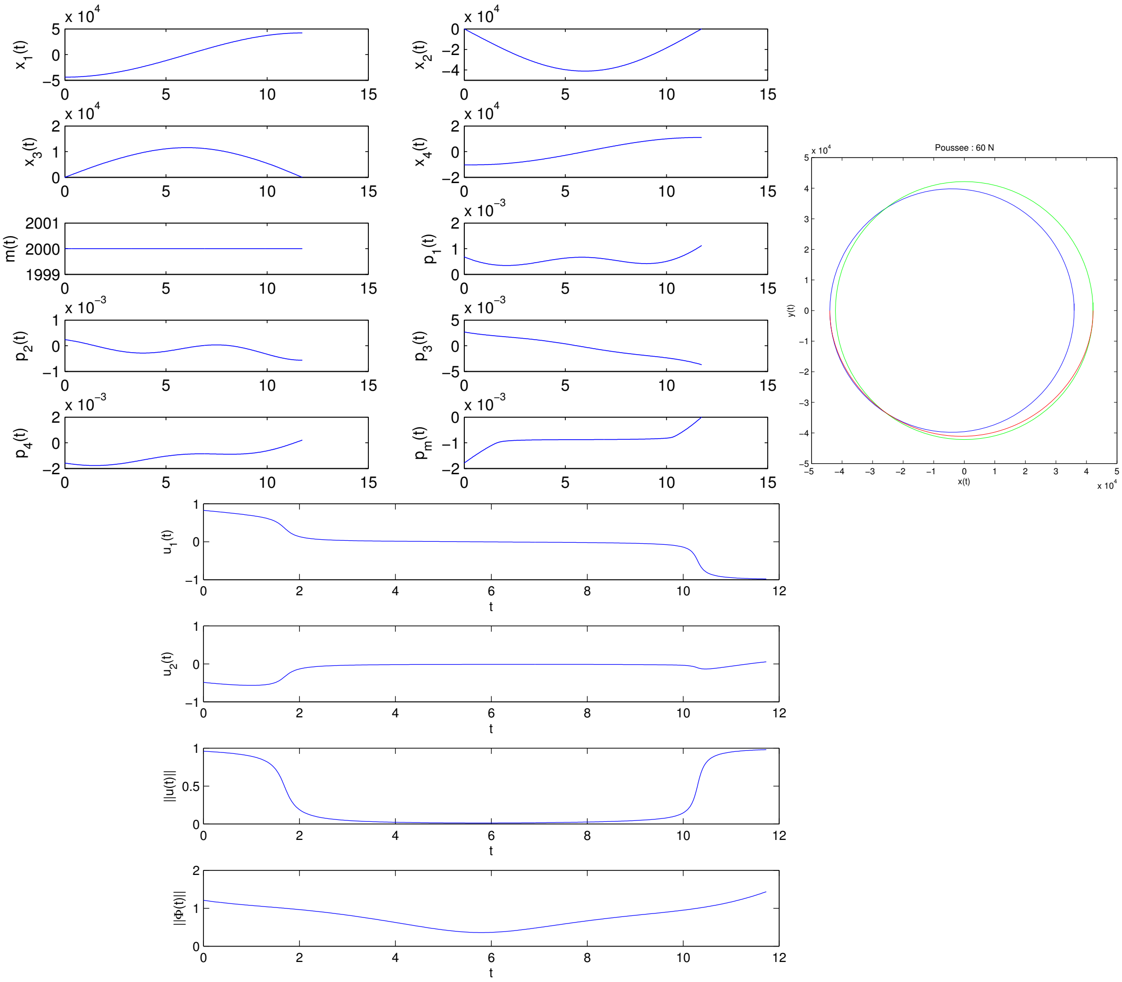

Figure 2 – *Solution du problème pour* $\varepsilon = 0.009$.

3.4 Résolution par tir multiple

Résoudre le problème de transfert avec maximisation de la masse finale

Annexe `flag` en sortie de `ssolve`

```
c         info = 0   improper input parameters.
c
c         info = 1   relative error between two consecutive iterates
c                    is at most xtol.
c
c         info = 2   number of calls to fcn with iflag = 1 has
c                    reached maxfev.
c
c         info = 3   xtol is too small. no further improvement in
c                    the approximate solution x is possible.
c
c         info = 4   iteration is not making good progress, as
c                    measured by the improvement from the last
c                    five jacobian evaluations.
c
c         info = 5   iteration is not making good progress, as
c                    measured by the improvement from the last
c                    ten iterations.
```