TP d'EDO : ordre

GERGAUD Joseph

1 Introduction

Il est rappelé que les programmes doivent respecter les **bonnes pratiques de la programmation**. En particulier on vérifiera que les interfaces soient bien définies (paramètres en entrée, en sortie avec leurs types, les dimensions, ...). Dans le cas contraire on mettra des **points négatifs** pour un maximum de 4 points.

On trouvera une version pdf de ce document à l'adresse
`http://gergaud.perso.enseeiht.fr/teaching/edo/edo_ordre.pdf`.

L'objectif de ce projet est de réaliser les graphiques de la figure 1 concernant l'ordre qui seront complétés avec les résultats obtenus pour le schéma implicite de Gauß à 2 étages (*cf.*cours sur les schémas implicites).

2 Rappels

2.1 Schémas de Runge-Kutta

On rappelle les schémas classiques

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

Euler Runge Heun

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

La méthode Rk4 Rk4 3/8

$$\begin{array}{c|cc} 1/2-\sqrt{3}/6 & 1/4 & 1/4-\sqrt{3}/6 \\ 1/2+\sqrt{3}/6 & 1/4+\sqrt{3}/6 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Gauss d'ordre 4

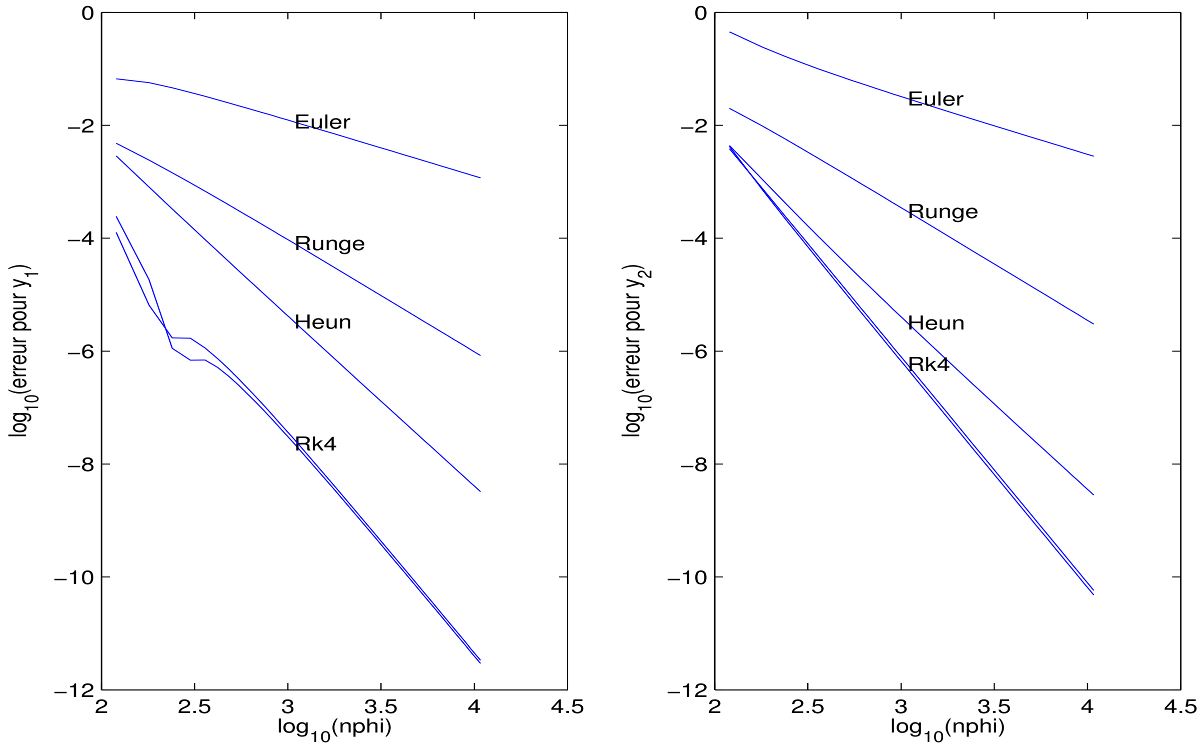

FIGURE 1 – *Erreur globale en fonction du nombre d'évaluations, E. Hairer, S.P. Nørsett and G. Wanner, Tome I, page 140,* $\log_{10}(err) = C_1 - p\log_{10}(nphi)$.

3 Travail demandé

3.1 Ordre

L'équation différentielle considérée est l'équation de Van der Pol

$$(IVP)\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = (1 - y_1^2(t))y_2(t) - y_1(t) \\ y_1(0) = 2.00861986087484313650940188 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

$t_f = T = 6.6632868593231301896996820305$

La solution de ce problème de Cauchy est périodique de période T.

Les programmes seront effectués en MATLAB. On demande que les appels aux sous-programmes se fassent à la MATLAB.

— Pour les schémas explicites :
`[T,Y] = ode_euler(@phi,[t0 tf],y0,N)` où `T` est un vecteur colonne de longueur $N+1$ et `Y` est de dimension $(N+1, n)$.

— Pour le schéma implicite de Gauß :
  `[T,Y,nphi,ifail] = ode_gauss_fp(@phi,[t0 tf],y0,option)` (respectivement `[T,Y,nphi,ifail] = ode_gauss_newton(@phi,[t0 tf],y0,option)`) pour la version point fixe (respectivement Newton) avec
  — `option(1)=N` ;
  — `option(2)=nb_itmax`, nombre d'itérations maximum pour le point fixe ;
  — `option(3)=f_eps`, ε pour le test d'arrêt pour le point fixe ;
  — `nphi`=nombre d'évaluations du second membre de l'équation différentielle ;
  — `ifail(i)`=nombre d'itérations si le point fixe a convergé pour l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ et -1 sinon.
— L'interface pour la fonction `phi` sera :
  `ypoint = phi(t,y)`.

Les programmes d'intégration numérique par les méthodes explicites ne devront comporter d'une seule boucle.

On demande pour cette équation :
— de réaliser les graphique de la figure 2 qui tracent les deux composantes de la solution et le plan de phase pour $N = 25$. Pour Gauß on prendra ` = 15` et `f_eps = 1.e-12`. On fera 2 versions pour Gauß : une version point fixe et une version Newton.
— de réaliser les graphiques de la figure 1. Pour les schémas explicites on mettra en abscisse le vecteur (en notationMATLAB) $\log_{10}$(`[120:60:1080 1200:600:10800]`). On rajoutera sur ces graphiques les résultats obtenus pour le schéma implicite de Gauß en prenant comme nombre de pas le vecteur `[120:60:1080 1200:600:10800]/4` et comme valeurs pour les paramètres `nb_itmax = 15` et `f_eps = 1.e-12`.
— On fera une deuxième figure avec les résultats correspondant au schéma implicite de Gauß pour
  1. `nb_itmax = 15` et `f_eps = 1.e-12` ;
  2. `nb_itmax = 2` et `f_eps = 1.e-12` ;
  3. `nb_itmax = 15` et `f_eps = 1.e-6`.

3.2 Rendu

Le travail en TP est individuel. Deux tests seront effectués, le premier lors du deuxième TP, le deuxième lors de dernière séance de TP. Le rendu définitif est à rendre le soir du dernier TP contiendra :
— les graphiques obtenus au format pdf ;
— les sources des programmes qui seront mis dans un répertoire <`noms`>.
  le fichier contenant l'archive (<`noms`>`.tar`), sera envoyé à votre enseignant en TP (`gergaud@enseeiht.fr` ou `damien.goubinat@enseeiht.fr`).

Dans le courriel vous mentionnerez le nom du fichier MATLAB permettant d'obtenir les courbes résultats.

4 Résultats pour tests

Voici ci-après les résultats pour $N = 10$ pour les différents schémas. La première colonne est T et les deux suivantes Y.

```
Euler
-----
[T Y]=
   1.0e+03 *

                   0   0.002008619860875                   0
   0.000666328685932   0.002008619860875  -0.001338401032434
   0.001332657371865   0.001116804859682   0.000029458487294
   0.001998986057797   0.001136433894810  -0.000719553966981
   0.002665314743729   0.000656974445535  -0.001337038672872
   0.003331643429662  -0.000233932776401  -0.002281177517157
   0.003997972115594  -0.001753946793787  -0.003562133341263
   0.004664300801526  -0.004127498422186   0.002534846643721
   0.005330629487459  -0.002438457389035  -0.021800755581294
   0.005996958173391  -0.016964926207850   0.051673054627621
   0.006663286859323   0.017466312380281  -9.812202238480943

Runge
-----
[T Y]=
                   0   2.008619860874843                   0
   0.666328685932313   1.562712360278651   0.014729243646829
   1.332657371864626   1.220894137875029  -0.531644111154892
   1.998986057796939   0.653509832528317  -1.176382554058143
   2.665314743729252  -0.425046060567530  -2.355437605902746
   3.331643429661565  -2.328613474497056  -0.666821025659383
   3.997972115593877  -1.601326538420963  -2.971936242570924
   4.664300801526190  -2.194094633102912   2.142928059459987
   5.330629487458503  -2.093551719985328   3.009462583470000
   5.996958173390816  -1.883624518031323   3.696462462835581
   6.663286859323128  -1.093338066861612   4.585206668061812

Heun
----
[T Y]=
```

```
                   0   2.008619860874843                   0
   0.666328685932313   1.863255533197435  -0.908266060321282
   1.332657371864626   1.211064582800380  -0.970739550986403
   1.998986057796939   0.340951280354486  -1.805621923056305
   2.665314743729252  -1.343388532295027  -2.597289061805764
   3.331643429661565  -1.553155419631253  -1.762194037001645
   3.997972115593877  -1.761923667266568  -0.354168010449823
   4.664300801526190  -1.696763283602980   0.676119846604791
   5.330629487458503  -1.141093089779297   1.054354969329856
   5.996958173390816  -0.188465573737059   1.992096663893664
   6.663286859323128   1.593565087325988   2.154895921996044

rk41
----
[T Y]=
                   0   2.008619860874843                   0
   0.666328685932313   1.728289565064685  -0.434733098442855
   1.332657371864626   1.281792525355265  -0.876907363239775
   1.998986057796939   0.486631604430130  -1.622466234766066
   2.665314743729252  -1.024410786018538  -2.556512804455775
   3.331643429661565  -1.953005683961636  -0.209070573804531
   3.997972115593877  -1.742817815413673   0.341277278614284
   4.664300801526190  -1.337915627756918   0.814186086166159
   5.330629487458503  -0.600769643339283   1.494502898570029
   5.996958173390816   0.821446001908530   2.589914527582617
   6.663286859323128   1.886292589030273   0.455334065676449

rk42
-----
[T Y]=
                   0   2.008619860874843                   0
   0.666328685932313   1.728431198946091  -0.211759053069020
   1.332657371864626   1.375706139766528  -0.721188019200479
   1.998986057796939   0.707667824739475  -1.357210789873531
   2.665314743729252  -0.590816207768864  -2.540503725686247
   3.331643429661565  -1.878982165607427  -0.961286868462577
   3.997972115593877  -1.902956029657481  -0.528261317222284
   4.664300801526190  -1.794364994284346  -0.200341333153498
   5.330629487458503  -1.596255551513502   0.385694139487150
   5.996958173390816  -1.154514128501387   0.909206784653410
   6.663286859323128  -0.301567059544812   1.775167703012563

Gauss, point fixe
-----------------
```

```
[N, nb_itmax, f_eps]
  10.000000000000000  15.000000000000000   0.000001000000000

[T Y]=
                   0   2.008619860874843                   0
   0.666328685932313   1.748077038315635  -0.614452193067304
   1.332657371864626   1.227167526678123  -0.975617349879985
   1.998986057796939   0.345219364241332  -1.811976134160198
   2.665314743729252  -1.241597780608769  -2.475124551330471
   3.331643429661565  -2.013913987826556  -0.001168903518536
   3.997972115593877  -1.753872199839338   0.612809197750127
   4.664300801526190  -1.235039630038149   0.970480377872889
   5.330629487458503  -0.359183505874149   1.797419504046430
   5.996958173390816   1.222176651788525   2.495490845811687
   6.663286859323128   2.014631389666057   0.015750010678870


nphie =

   296


ifail =

    -1     14     12     16     -1     -1     14     12     16     -1

Gauss, Newton
-------------
[N, nb_itmax, f_eps]
  10.000000000000000  15.000000000000000   0.000001000000000

[T Y]=
                   0   2.008619860874843                   0
   0.666328685932313   1.748103353412420  -0.614524376585803
   1.332657371864626   1.227167371665737  -0.975642346688062
   1.998986057796939   0.345201034491682  -1.812011679746201
   2.665314743729252  -1.241634876414838  -2.475102844185241
   3.331643429661565  -2.013908638346081  -0.001153761617750
   3.997972115593877  -1.753891509975080   0.612895411728274
   4.664300801526190  -1.235024728110440   0.970518388811259
   5.330629487458503  -0.359136669330347   1.797486858502427
   5.996958173390816   1.222255698893968   2.495430848815410
   6.663286859323128   2.014631461651370   0.015689664812240
```

```
nphie =

    96


ndphie =

    76


ifail =

     4     3     3     4     5     4     3     3     4     5
```

On trouveras aussi ci-après les figures des solutions pour $N = 25$ pas.

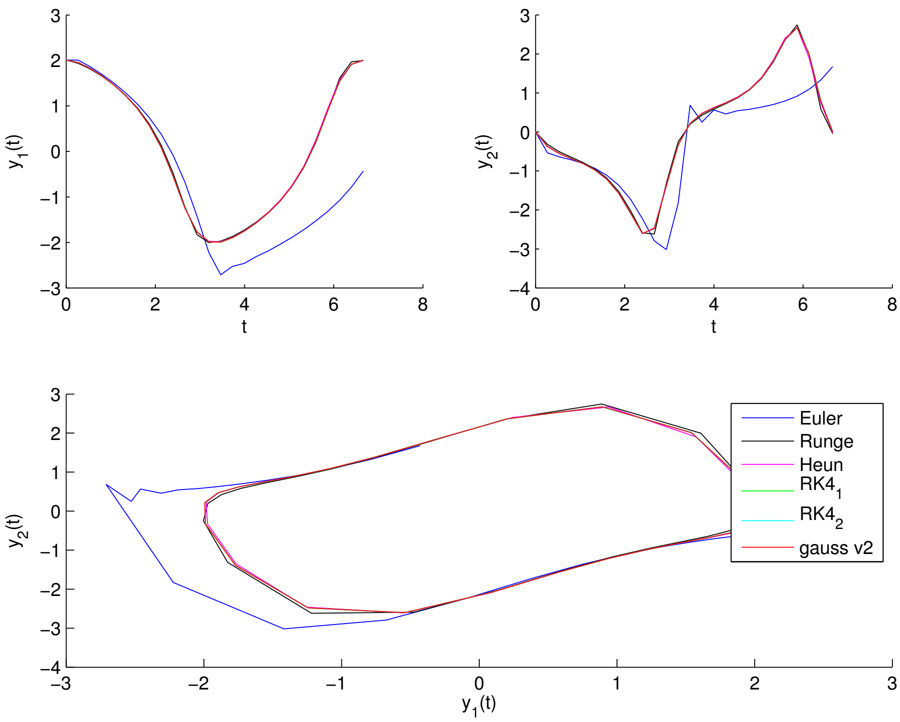

FIGURE 2 – *Solution de l'équation de Van der Pol, composante 1 et 2 et plan de phase, pour les schémas de Runge-Kutta avec* $N = 25$*, pour Gauß* `nb_itmax = 15` *et* `f_eps = 1.e-12`*.*