



TP EDO : Problèmes raides

GERGAUD Joseph

1 Introduction aux problème raides

1.1 Exercice

▷ **Exercice 1.** On considère l'équation différentielle linéaire suivante

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = \lambda y(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbf{C}$, $Re(\lambda) < 0$ et $y(t) \in \mathbf{C}$. On notera $h = (t_f - t_0)/N$, le pas supposé constant et on notera $z = \lambda h$.

1.1. 1. On considère le schéma d'Euler explicite. Montrer que l'on peut écrire

$$y_N = R(z)^N y_0.$$

On exprimera $R(z)$ en fonction de z .

2. On suppose ici que $z \in \mathbf{C}$, visualiser dans le plan complexe l'ensemble $|R(z)| \leq 1$.

1.2. On considère le schéma d'Euler implicite.

1. Montrer que l'on peut écrire pour $z \neq 1$

$$y_N = R(z)^N y_0.$$

On exprimera $R(z)$ en fonction de z .

2. On suppose ici que $z \in \mathbf{C}$, visualiser dans le plan complexe l'ensemble $|R(z)| \leq 1$.

1.3. On considère un schéma de Runge-Kutta à s étages défini par le tableau de Butcher 1. Montrer que l'on peut écrire, sauf pour quelques valeurs de z ,

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

TABLE 1 – *Tableau de Butcher.*

$$y_N = R(z)^N y_0.$$

On exprimera $R(z)$ en fonction de z, A, b et du vecteur $\mathbf{1}$ (le vecteur colonne qui ne contient que des 1).

- 1.4. 1. Pourquoi désire-t-on pour une méthode numérique de Runge-Kutta avoir $\{z, |R(z)| \leq 1\} \subset \mathbf{C}^- = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$?
2. Commentaires sur les méthodes d'Euler explicite et implicite.

1.2 Exemples

On considère l'exemple

$$(IVP)_1 \begin{cases} \dot{y}(t) = -50y(t) \\ y(0) = 10 \end{cases}$$

avec $[t_0 \ t_f] = [0 \ 1.5]$ et l'exemple de Curtiss & Hirschfelder

$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = -50(y(t) - \cos(t)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

avec $[t_0 \ t_f] = [0 \ 1.5]$.

2 Travail demandé

Réaliser les graphiques des figures 1 et 2 ci-après (accessible en couleur sous <http://gergaud.perso.enseeiht.fr/teaching/>, edo, projet 1.

2.1 Rendu

Le travail en TP est individuel. Un test sera effectué lors de la dernière séance de TP. Le rendu définitif à rendre le soir du dernier TP contiendra :

- les graphiques obtenus au format pdf ;
- les sources des programmes, ils seront mis dans un répertoire `<noms>`. le fichier contenant l'archive (`<noms>.tar`), sera envoyé à votre enseignant en TP. Dans le courriel vous mentionnerez le nom du fichier MATLAB permettant d'obtenir les courbes résultats.

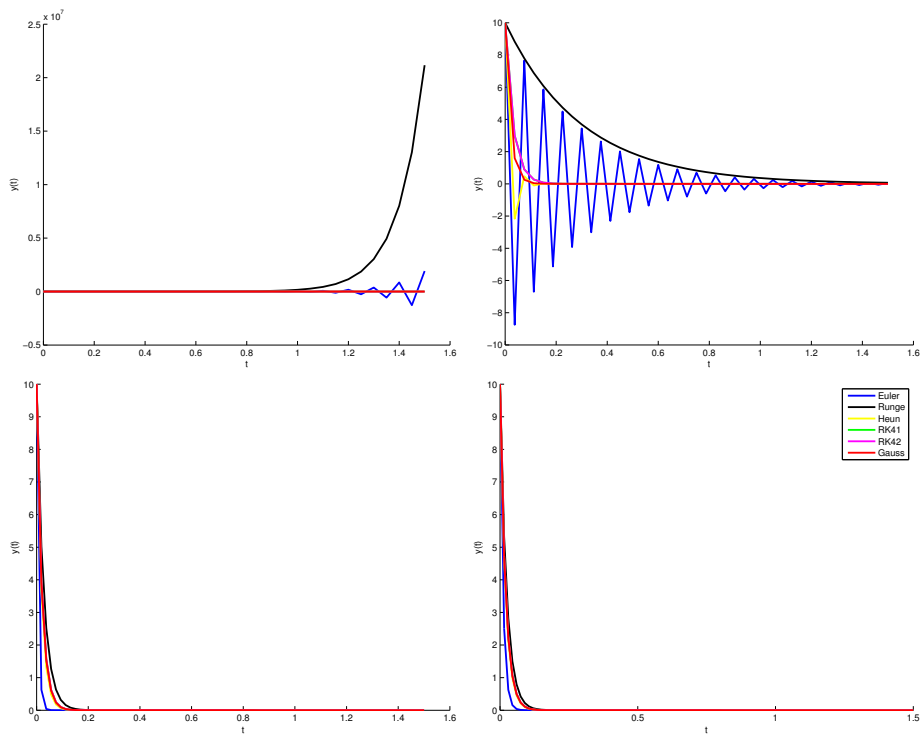


FIGURE 1 – Solution calculée pour $N = 30, 40, 80$ et 100 pour le problème $(IVP)_1$.

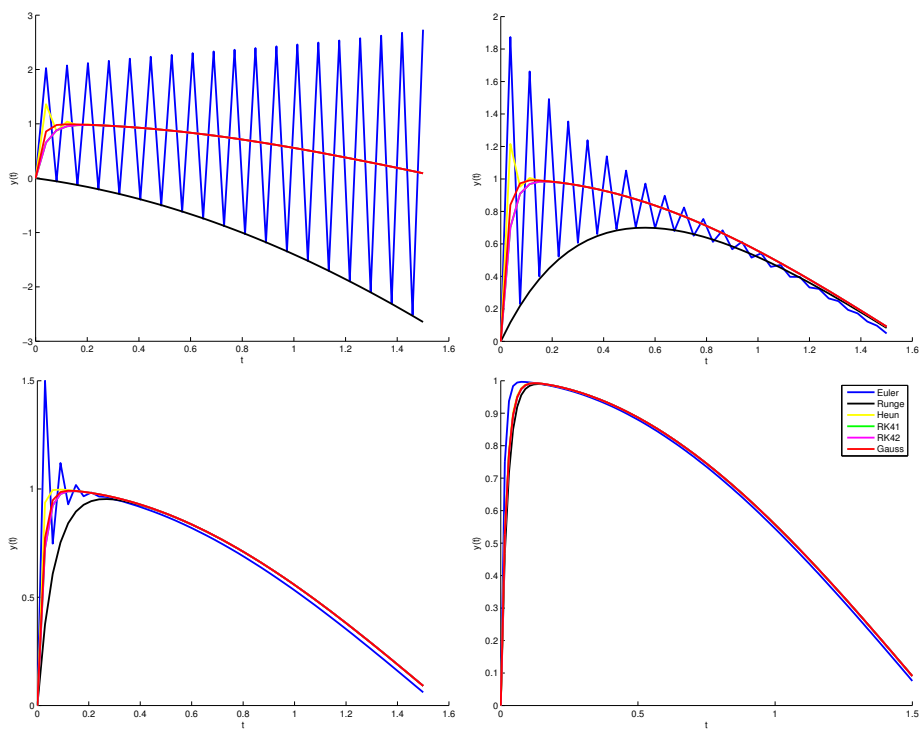


FIGURE 2 – Solution calculée pour $N = E(50t_f/1.974)$, $E(50t_f/1.875)$, 50 et 100 pour le problème $(IVP)_2$.