# Examen d'EDO
# Mardi 10 mars 2009

▷ **Exercice 1.** (5.5 points) Soit $\omega > 0$, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

**1.1.** Calculer $A^2$ et $e^{tA}$.

**1.2.** En déduire la solution de

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t) \\ y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \end{array} \right.$$

où $y(t) \in \mathbf{R}$ et $\omega > 0$.

**1.3.** Utiliser la même démarche pour trouver la solution de

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}(t) = \omega^2 y(t) \\ y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0. \end{array} \right.$$

▷ **Exercice 2.** (3 points) On considère le système de Cauchy suivant

$$(IVP)_\lambda \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = \varphi(t, y(t), \lambda) \\ y(t_0) = y_0, \end{array} \right.$$

et on note $y(t, \lambda)$ sa solution.

**2.1.** En admettant que la dérivée partielle de la solution par rapport à $\lambda$ $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ existe et à partir de l'écriture

$$y(t, \lambda) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(s, y(s, \lambda), \lambda) ds,$$

donner l'expression du système différentiel que doit vérifier cette dérivée partielle.

▷ **Exercice 3.** (4,5 points) On considère la résolvante $R(t, t_0)$ de l'équation linéaire $\dot{y}(t) = A(t)y(t)$. On suppose que pour tout $t$, $A(t)$ est antisymétrique.

**3.1.** Montrer que
$$\frac{\partial}{\partial t}(R(t,t_0)^T R(t,t_0)) = 0.$$

**3.2.** En déduire que pour tout $(t,t_0)$, $R(t,t_0)$ est une rotation et que pour toute solution $y(t)$ on a $\|y(t)\| = \|y_0\|$, où $y_0 = y(t_0)$. On rappelle que $\det(R(t,t_0)) = \exp(\int_{t_0}^t trace(A(s))ds)$.

▷ **Exercice 4.** (7 points) On considère l'équation différentielle linéaire suivante
$$(IVP) \begin{cases} \dot{y}(t) = \lambda y(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

où $\lambda \in \mathbf{C}$, $Re(\lambda) < 0$ et $y(t) \in \mathbf{C}$. On notera $h = (t_f - t_0)/N$, le pas supposé constant et on notera $z = \lambda h$.

**4.1.**
1. On considère le schéma d'Euler explicite. Montrer que l'on peut écrire
$$y_N = R(z)^N y_0.$$
On exprimera $R(z)$ en fonction de $z$.
2. On suppose ici que $z \in \mathbf{C}$, visualiser dans le plan complexe l'ensemble $|R(z)| \leq 1$.

**4.2.** On considère le schéma d'Euler implicite.
1. Montrer que l'on peut écrire pour $z \neq 1$
$$y_N = R(z)^N y_0.$$
On exprimera $R(z)$ en fonction de $z$.
2. On suppose ici que $z \in \mathbf{C}$, visualiser dans le plan complexe l'ensemble $|R(z)| \leq 1$.

**4.3.** On considère un schéma de Runge-Kutta à $s$ étages défini par le tableau de Butcher 1. Montrer que l'on peut écrire, sauf pour quelques valeurs de $z$,

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

TABLE 1 – *Tableau de Butcher.*

$$y_N = R(z)^N y_0.$$

On exprimera $R(z)$ en fonction de $z, A, b$ et du vecteur $\mathbf{1}$ (le vecteur colonne qui ne contient que des 1).

**4.4.**
1. Pourquoi désire-t-on pour une méthode numérique de Runge-Kutta avoir $\{z, |R(z)| \leq 1\} \subset \mathbf{C}^- = \{z \in \mathbf{C}, Re(z) \leq 0\}$ ?
2. Commentaires sur les méthodes d'Euler expicite et implicite.