Examen de l'UE Éléments d'analyse numérique

Document autorisé : 1 page A3 recto-verso

Les 2 parties sont à rédiger sur des feuilles différentes

1 Partie Équations différentielles ordinaires

▷ **Exercice 1.** (4 points) On considère dans cet exercice le cas d'un oscillateur harmonique $\ddot{q}(t) = -\omega^2 q(t)$, $q(t) \in \mathbf{R}$ qui modélise le cas d'une masse suspendue à un ressort sans amortissement. Ce système s'écrit sous la forme du problème de Cauchy

$$(IVP)\begin{cases} \dot{q}(t) = p(t) \\ \dot{p}(t) = -\omega^2 q(t) \\ q(0) = q0 \\ p(0) = p0. \end{cases}$$

1.1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer e^{tA}.

1.2. Écrire la solution en fonction de ω, q_0 et p_0.

1.3. Montrer que l'on peut écrire la solution $q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi)$. On donnera les valeurs de q_m et de φ en fonction de q_0 et de p_0.

1.4. Montrer que sur toute trajectoire on a

$$p^2(t) + \omega^2 q^2(t)$$

qui est constant.

▷ **Exercice 2.** [1] (4 points) On considère le même système qu'à l'exercice précédent avec $\omega = 1$. L'équation différentielle s'écrit donc

$$\dot{q}(t) = p(t) \tag{1}$$
$$\dot{p}(t) = -q(t) \tag{2}$$

On notera $y(t) = (q(t), p(t)$.

2.1. Écrire le schéma d'Euler explicite sur cet exemple et montrer que $||y_1||^2 = (1 + h^2)||y_0||^2$.

2.2. Écrire le schéma d'Euler implicite sur cet exemple et montrer que $||y_1||^2 = \frac{1}{(1-h^2)}||y_0||^2$.

2.3. On considère maintenant le schéma d'Euler symplectique de type A. C'est-à-dire le schéma défini par :
– Un pas d'Euler implicite sur la première équation (1) ;
– Un pas d'Euler explicite sur la deuxième équation (2) ;
Montrer que dans ce cas y_0 et y_1 appartienne à la même ellipse d'équation $p^2 + q^2 - hpq = cte$.

2.4. Quels commentaires pouvez-vous faire sur ces deux exercices ?

▷ **Exercice 3** (Modèle de Kaplan)**.** (4 points) On désire étudier la diffusion d'une drogue dans un organe d'un corps donné. La drogue est injectée par intraveineuse dans le sang à l'instant $t_0 = 0$. On modélise le système par un modèle à compartiments (*cf.* la figure 1).

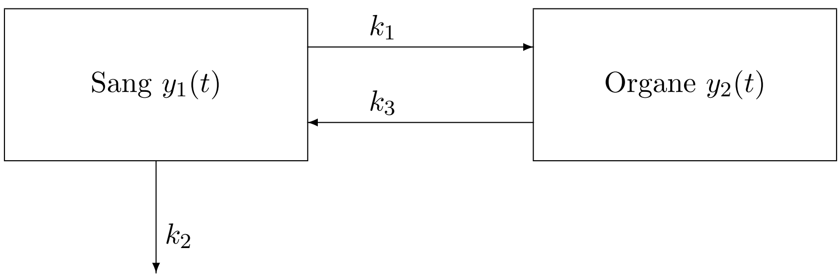

Figure 1 – Modèle par compartiments.

1. Référence : E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner, *Geommetric Numerical Integration. Structure–Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Springer Serie in Computational Mathematics,Second Edition, 2005.

Les concentrations dans le sang, mesurées à différents instants, sont données à la table 1.

t_i	y_{i1}	t_i	y_{i1}
0.25	215.6	3.00	101.2
0.50	189.2	4.00	88.0
0.75	176.0	6.00	61.6
1.00	162.8	12.00	22.0
1.50	138.6	24.00	4.4
2.00	121.0	48.00	0.0

TABLE 1 – Données pour l'exemple de Kaplan.

Le système d'équations différentielles décrivant le modèle est alors

$$(EDO)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \dot{y}_1(t) = -(k_1+k_2)y_1(t) + k_3 y_2(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \dot{y}_2(t) = k_1 y_1(t) - k_3 y_2(t) \\ y_1(0) = c_0 \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

On désire estimer les paramètres c_0, k_1, k_2 et k_3 par les moindres carrés. Posons $\beta = (c_0, k_1, k_2, k_3)$, alors pour toute valeur de β, on peut intégrer le système d'équations différentielles ordinaires à condition initiale (EDO). Notons $(y_1(t,\beta), y_2(t,\beta))$ cette solution. Par suite on peut calculer les n résidus

$$r_i(\beta) = y_{i1} - y_1(t_i, \beta).$$

Ces résidus sont visualisés sur la figure 2. Nous estimerons alors le paramètre β en résolvant le problème d'optimisation aux moindres carrés

$$(P)\begin{cases} Min f(\beta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i^2(\beta) = \frac{1}{2}||r(\beta)||^2 \\ \beta \in \mathbf{R}^4. \end{cases}$$

Pour cela il faut donc calculer la dérivée des résidus $r_i(\beta)$ par rapport aux paramètres.

3.1. Écrire les équations variationnelles permettant de calculer

$$\frac{\partial r_i(\beta)}{\partial c_0}.$$

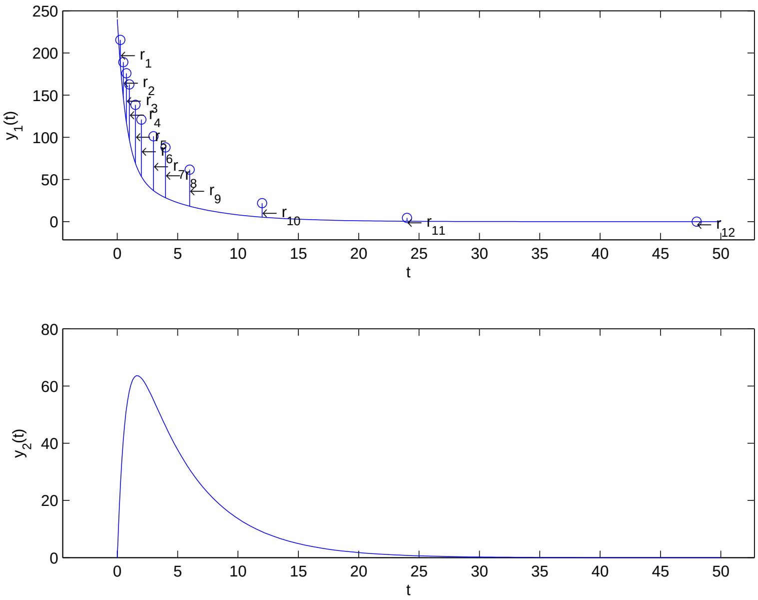

Figure 2 – Critère des moindres carrés pour le modèle de Kaplan.

3.2. On pose $k = (k_1, k_2, k_3)$, écrire les équations variationnelles permettant de calculer

$$\frac{\partial r_i(\beta)}{\partial k}.$$