Examen de l'UE Éléments d'analyse numérique

Session 1

Document autorisé : 1 page A4 recto-verso

Les 2 parties sont à rédiger sur des feuilles différentes

1 Partie Interpolation et approximation

2 Partie équation différentielles ordinaires

▷ **Exercice 1.** (4 points) On considère l'équation différentielle linéaire à condition initiale

$$(IVP)_1 \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = -y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_1(t) + t \\ y(0) = y_0. \end{array} \right.$$

1.1. Écrire le système sous la forme

$$(IVP)_2 \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = Ay(t) + b(t) \\ y(0) = y_0. \end{array} \right.$$

On donnera la matrice A et la fonction b.

1.2. Sachant que

$$A = P\Lambda P^{-1},$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

Calculer e^{tA}.

1.3. On rappelle que la solution d'un système linéaire

$$(IVP)_2 \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{array} \right.$$

s'écrit

$$y(t) = R(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)ds.$$

Calculer à l'aide de cette formule la solution du problème de départ $(IVP)_1$.

▷ **Exercice 2.** (4 points) On considère l'équation différentielle linéaire autonome à condition initiale

$$(IVP)_2 \begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + b \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

et le schéma de Runge Kutta donné par le tableau de Butcher 1 (schéma de type Lobatto IIIC)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/6 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

Table 1 – *Tableau de Butcher pour le schéma de Lobatto IIIC d'ordre 4.*

2.1. Écrire le premier pas de ce schéma.

2.2. Ce schéma est-il explicite ou implicite ?

2.3. Donner la dimension et écrire le système linéaire que l'on doit résoudre à chaque pas pour calculer les vecteurs k_i du schéma.

▷ **Exercice 3.** (4 points) On considère un satellite de masse négligeable qui tourne autour de la Terre. Le système différentiel qui décrit le mouvement dans un système de coordonnées cartésiennes est le suivant :

$$(IVP)_1 \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -\dfrac{\mu x_1(t)}{||x(t)||^3} \\ \ddot{x}_2(t) = -\dfrac{\mu x_2(t)}{||x(t)||^3} \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0, \end{cases}$$

où $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ est la position du satellite, $\ddot{x}(t)$ est son accélération, $||x(t)|| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$, μ est une constante et x_0 et $\dot{x}_0$ sont les position et vitesse initiales.

3.1. Écrire le système sous la forme

$$(IVP)_2 \begin{cases} \dot{y}(t) = \varphi(t, y(t)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On explicitera l'application φ et y_0.

3.2. On note $y(t, y_0)$ la solution à l'instant t du système $(IVP)_2$. Quelles sont les dimensions de

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0).$$

3.3. Donner l'équation variationnelle dont est solution

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(., y_0).$$