Examen d'EDO
Jeudi 28 janvier 2010

▷ **Exercice 1.** (6 points) Soient α et β deux réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

1.1. On considère la matrice A comme étant une matrice dans $\mathbf{C}$, calculer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A. En déduire que l'on a

$$e^{tA} = e^{\alpha t} R(\beta t),$$

où $R(\beta t)$ est une matrice réelle d'une rotation que l'on déterminera.

1.2. On considère maintenant le problème de Cauchy

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = \alpha y_1(t) - \beta y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = \beta y_1(t) + \alpha y_2(t) \\ y(0) = (1, 0). \end{array} \right.$$

Donner, en fonction de α et β la solution de (IVP).

1.3. Dans les différents cas suivants représenter graphiquement dans le plan de phase (y_1, y_2) la courbe solution et les vecteurs tangents en $t = 0$ et $\pi/2$,

$\alpha = 0$ et $\beta = 1$ cas (a)	$\alpha = \log(2)/(2\pi)$ et $\beta = 1$ cas (b)	$\alpha = -\log(2)/(2\pi)$ et $\beta = 1$ cas (c)

▷ **Exercice 2.** (4 points) Soit $y_0 > 0$ on considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} y :]t_0 - 1/y_0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (t, y_0) & \longmapsto & y(t, y_0) = \dfrac{y_0}{(t - t_0)y_0 + 1}, \end{array}$$

et le système de Cauchy suivant

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = -y^2(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{array} \right.$$

2.1. Vérifier que $y(t, y_0)$ est la solution de (IVP) et calculer

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0).$$

2.2. Donner l'équation variationnelle que doit vérifier

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(.,y_0)$$

et vérifier que la dérivée partielle calculée à la question **2.1** est bien solution de ce système variationnelle.

▷ **Exercice 3.** (8 points) On considère la méthode à un pas suivante

$$y_1 = y_0 + h(\alpha\varphi(t_0,y_0) + \beta\varphi(t_0+h/2, y_0+(h/2)\varphi(t_0,y_0)) + \gamma\varphi(t_0+h, y_0+h\varphi(t_0,y_0))).$$

3.1. Montrer que c'est un schéma de Runge-Kutta. On donnera le nombre d'étages et le tableau de Butcher 1.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Table 1 – *Tableau de Butcher.*

3.2. On donne les tableaux de Butcher pour les schémas d'Euler, du point milieu et des trapèzes.

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Euler — point milieu — trapèze

Table 2 – *Schémas de Runge-Kutta classiques.*

Pour quelles valeurs du triplet (α,β,γ) retrouve-t-on
- la méthode d'Euler ;
- la méthode du point milieu ;
- la méthode des trapèzes.

3.3. Quelles relations doivent satisfaire le triplet (α,β,γ) pour que la méthode soit
- consistante ;
- d'ordre ≥ 1 ;
- d'ordre ≥ 2.

On effectuera les calculs dans le cas où $y(t) \in \mathbf{R}$.

3.4. On considère maintenant dans $\mathbf{R}$ le problème de Cauchy

$$(IVP)\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Donner y_1 en fonction de y_0 et de h. En déduire que cette méthode ne peut être d'ordre 3.

▷ **Exercice 4.** (3 points) Le but de cet exercice est de démontrer que toute méthode de Runge-Kutta explicite est stable. On suppose que la fonction $\varphi(t, y)$ est lipschitzienne par rapport à la variable y de constante L et on note le schéma de la façon suivante

$$\begin{aligned}
z_1 &= y_0 \\
z_2 &= y_0 + ha_{21}\varphi(t_0, z_0) \\
&\vdots \\
z_s &= y_0 + h\sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}\varphi(t_0 + c_j h, z_j) \\
y_1 &= y_0 + h\Phi(t_0, y_0, h) = y_0 + h\sum_{j=1}^{s} b_j\varphi(t_0 + c_j h, z_j).
\end{aligned}$$

4.1. On suppose que les $\widetilde{z}_i$ sont obtenues de façon identique à partir de $\widetilde{y}_0$ et on pose $\alpha = \max_i(\sum_j |a_{ij}|)$. Montrer que l'on a pour tout $i = 1, \ldots, s$

$$||z_i - \widetilde{z}_i|| \leq (1 + (\alpha Lh) + \cdots + (\alpha Lh)^{i-1})||y_0 - \widetilde{y}_0||.$$

4.2. Montrer que $\Phi(t, y, h)$ est lipchitzienne par rapport à la variable y de constante

$$\Lambda = L\sum_{i=1}^{s} |b_i|(1 + (\alpha Lh) + \cdots + (\alpha Lh)^{i-1}).$$

4.3. En déduire que toute méthode de Runge-Kutta explicite est stable.