Examen de l'UE Éléments d'analyse numérique

Session 2

Document autorisé : 1 page A3 recto-verso

Les 2 parties sont à rédiger sur des feuilles différentes

1 Partie Interpolation et approximation

2 Partie équations différentielles ordinaires

▷ **Exercice 1.** (6 points) On considère le problème à valeur initiale suivant

$$(IVP)\left\{\begin{array}{l}\dot{y}(t)=0 \quad \text{si } t\leq 1\\ \dot{y}(t)=t-1 \quad \text{si } t>1\\ y(0)=0.\end{array}\right.$$

1.1. Donnez la fonction φ (espace de départ, espace d'arrivée et définition de la fonction) permettant d'écrire le système sous la forme

$$(IVP)\left\{\begin{array}{l}\dot{y}(t)=\varphi(t,y(t))\\ y(0)=0.\end{array}\right.$$

1.2. À l'aide du théorème d'existence de solution du cours montrez que ce système possède une unique solution.

1.3. Calculez la solution de ce problème.

1.4. On considère les schémas d'Euler explicite et $rk2$ défini par le tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}.$$

Pour l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ avec $t_i < 1 < t_{i+1}$ et $y_i = y(t_i) = 0$, donnez pour ces deux schémas les valeurs de y_{i+1} approximation de la solution $y(t_{i+1})$ (pour $rk2$ on donnera les deux valeurs possibles suivant le signe de $t_i + h/2 - 1$, où $h = t_{i+1} - t_i$).

1.5. En déduire pour cet exemple l'ordre de ces deux schémas. Commentaire.

▷ **Exercice 2.** (3 points) On considère le modèle de FitzHugh-Naguma[1] qui donne l'évolution en fonction du temps du voltage à travers la membrane d'un axone :

$$(IVP)\begin{cases} \dot{y_1}(t) = c(y_1(t) - y_1^3(t)/3 + y_2(t)) \\ \dot{y_2}(t) = -(1/c)(y_1(t) - a + by_2(t)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

où

- y_1 est le voltage ;
- y_2 est la variable de recouvrement (modélise les courants extérieurs) ;
- $\theta = (a, b, c)$ sont les paramètre du modèle

2.1. On note $y(t, y_0, \theta_0)$ la solution en t du problème (IVP). Quelle est la dimension de

$$\frac{\partial y}{\partial \theta}(t, y_0, \theta_0)?$$

2.2. On suppose connue la solution $y(t, y_0, \theta_0)$ pour les valeurs fixées de y_0 et de θ_0. Donnez l'équation variationnelle dont est solution

$$\frac{\partial y}{\partial \theta}(., y_0, \theta_0).$$

On donnera les dimensions des matrices $A(t)$ et $B(t)$ et on explicitera celles-ci en fonction de $y(t, y_0, \theta_0)$ et de θ_0.

▷ **Exercice 3.** (4 points) Soit l'équation différentielle linéaire à condition initiale

$$(IVP)\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On pose $y^{(0)}$ l'application constante $y^{(0)}(t) = y_0$ et le processus itératif qui intervient dans la démonstration du théorème d'existence de solution (itération de Picard) :

$$y^{(k+1)}(t) = y_0 + \int_0^t \varphi(s, y^{(k)}(s))ds.$$

3.1. Calculer $y^{(1)}$ et $y^{(2)}$.

3.2. Donnez et démontrez par récurrence l'expression de $y^{(k)}$.

3.3. Vers quoi converge $y^{(k)}$ lorsque k tend vers $+\infty$?

Références

[1] R. FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 6 :445–466, 1961.