Projet 2 d'EDO : pas variable

GERGAUD Joseph

1 Présentation partie II

1.1 Introduction

L'objectif de cette partir est de réaliser les graphiques de la figure 1 concernant l'intégration à pas variable. Pour obtenir les graphiques en couleur, veuillez vous reporter au cours polycopié page 34 accessible à l'adresse : `http ://gergaud.perso.enseeiht.fr/teaching/`

L'équation différentielle considérée est l'équation du Brusselator

$$(IVP)\begin{cases} \dot{y}_1(t) = 1 + y_1^2(t)y_2(t) - 4y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = 3y_1(t)) - y_1^2(t)y_2(t) \\ y_1(0) = 1.5 \\ y_2(0) = 3 \end{cases}$$

$t_f = 20$

2 Intégration à pas variable

2.1 Méthode de Runge-Kutta emboîtées Rk4(3)

0					
1/3	1/3				
2/3	−1/3	1			
1	1	−1	1		
1	1/8	3/8	3/8	1/8	
	1/12	1/2	1/4	0	1/6

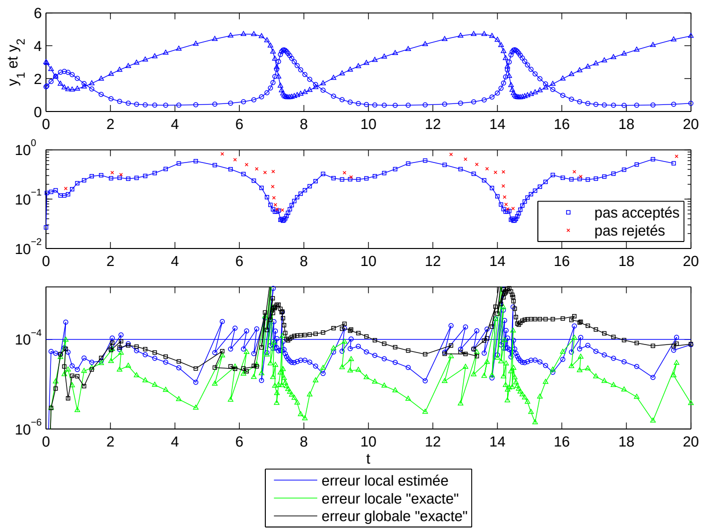

FIG. 1 – *Solutions, pas acceptés et rejetés, erreurs locales estimés, "exactes" et erreurs globales "exactes". L'intégration est effectuée avec rk34 (règle 3/8 pour l'ordre 4) et les solutions "exactes" sont calculées avec ode45, E. Hairer, S.P. Nørsett and G. Wanner, Tome I, page 170.*

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) \\
k_2 &= f(t_0 + h/3, y_0 + (h/3)k_1) \\
k_3 &= f(t_0 + 2h/3, y_0 + h(-k_1/3 + k_2)) \\
k_4 &= f(t + h, y_0 + h(k_1 - k_2 + k_3)) \\
y_1 &= y_0 + (h/8)(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)\ 0(h^5) \\
\widehat{y}_1 &= y_0 + (h/12)(k_1 + 6k_2 + 3k_3 + 2f(t_0 + h, y_1))\ O(h^4)
\end{aligned}
$$

2.2 Contrôle du pas

Calculer les $sc_i = Atol_i + Rtol_i \max(|y_{i0}|, |y_{i1}|)$
Calculer

$$err = ||y_1 - \widehat{y}_1|| = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_{i1} - \widehat{y}_{i1}}{sc_i}\right)^2}$$

si $err < 1$ **alors**
  Le pas est accepté
fin si
Calculer le nouveau pas : $h = h \min(5, \max(0.2, 0.9 \sqrt[\widehat{p}+1]{1/err}))$
si $t + h > t_f$ **alors**

$h = t_f - t$
fin si

2.3 Pas initial

Ici $sc_i = Atol + Rtol|y_i|$ et $||y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{y_i}{sc_i})^2}$

Calcul d'un premier pas d'euler
$k_0 = f(t_0, y_0), d_0 = ||y_0||, d_1 = ||k_0||$
$h_0 = 0.01\frac{d_0}{d_1}$ {le pas est petit par rapport à la solution}
si $d_0 < 10^{-5}$ ou $d_1 < 10^{-5}$ **alors**
$h_0 = 10^{-6}$
fin si
$h_0 = \min(h_{max}, h_0)$
$y_1 = y_0 + h_0 k_0$ {pas d'Euler}
Estimation de la dérivée seconde
$k_1 = f(t_0 + h_0, y_1)$
$d_2 = ||k_1 - k_0||/h_0$
si $\max(d_1, d_2) < 10^{-15}$ **alors**
$h_1 = \max(10^{-6}, 10^{-3}h_0)$
sinon
$h_1 = (0.01/\max(d_1, d_2))^{1/p}$ {h_1 tel que $h_1^{\widehat{p}+1}\max(d_1, d_2) = 0.01$}
fin si
$h = \min(100h_0, h_1, h_{max})$

3 Travail demandé

Les programmes seront effectués en MATLAB. Ce projet est à faire par binôme (le même que pour le projet contrôle). Le rendu du projet comprendra un rapport écrit (qui peut-être manuscript) qui sera remis au plus tard le ? ? ?. Ce rapport écrit contiendra :
– les sources des programmes (à envoyer à `gergaud@n7.fr` dans un fichier `<noms du binôme>.tar`) ;
– les graphiques ;
– tout commentaires utiles ;

Remarque 3.1. *Nous ferons à la fin des TP, un point sur l'avancement du travail.*