# Corrigé de l'examen EDO: partie 2

## ▷ Exercice 1.

**1.1.** On a

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} = I + h\sum_{i=1}^{s} b_i \frac{\partial k_i}{\partial y_0}$$

avec

$$\frac{\partial k_i}{\partial y_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(t_0 + c_i h, y_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j\right)\left(I + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\frac{\partial k_j}{\partial y_0}\right).$$

Considérons maintenant les équations variationnelles.

$$(EQVAR)\begin{cases} \dot{y}(t) = \varphi(t, y(t)) \\ \dot{Y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y(t))Y(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ Y(t_0) = I. \end{cases}$$

Le schéma de Runge-Kutta appliqué à ce problème $(EQVAR)$ donne

$$\begin{aligned}
k_1 &= \varphi(t_0, y_0) \\
K_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t_0, y_0).I \\
&\vdots \\
k_i &= \varphi\left(t_0 + c_i h, y_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j\right) \\
K_i &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(t_0 + c_i h, y_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j\right)\left(I + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}K_j\right) \\
&\vdots \\
y_1 &= y_0 + h\sum_{j=1}^{s} b_i k_i \\
Y_1 &= I + h\sum_{j=1}^{s} b_i K_i.
\end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à démontrer par récurrence que

$$K_i = \frac{\partial k_i}{\partial y_0}$$

Ce résultat est vrai pour $i = 1$ :

$$K_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t_0, y_0) = \frac{\partial k_0}{\partial y_0}$$

Supposons qu'il soit vrai pour $i-1$ et montrons le pour $i$.

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(t_0 + c_i h, y_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right)\left(I + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\frac{\partial k_j}{\partial y_0}\right) \\ &= \frac{\partial k_i}{\partial y_0}. \end{aligned}$$

**1.2.** Montrons que sur l'intervalle $[t_l, t_{l+1}]$, le schéma de Runge-Kutta s'écrit

$$\begin{aligned} k_{1,l} &= \varphi(t_l, y_l) \\ K_{1,l} &= \frac{\partial k_{1,l}}{\partial y_l} Y_l \\ &\vdots \\ k_{i,l} &= \varphi\left(t_0 + c_i h, y_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_{j,l}\right) \\ K_{i,l} &= \frac{\partial k_{i,l}}{\partial y_l} Y_l \\ &\vdots \\ y_{l+1} &= y_l + h\sum_{j=1}^{s} b_i k_{i,l} \\ Y_{l+1} &= \frac{\partial y_{l+1}}{\partial y_l} Y_l. \end{aligned}$$

Montrons cette propriété pour les $K_{i,l}$ par récurrence. Ceci est vrai pour $i = 1$ :

$$\begin{aligned} k_{1,l} &= \varphi(t_l, y_l) \\ K_{1,l} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t_l, y_l) Y_l = \frac{\partial k_{1,l}}{\partial y_l} Y_l \end{aligned}$$

Supposons que cela soit vrai pour $i$ et montrons le pour $i+1$. On a par définition du schéma de Runge-Kutta pour $i+1$

$$\begin{aligned}
k_{i+1,l} &= \varphi\left(t_l + c_{i+1}h, y_l + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}k_{j,l}\right)\\
K_{i+1,l} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(t_l + c_{i+1}h, y_l + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}k_{j,l}\right)\left(Y_l + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}K_{j,l}\right)\\
&= \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(t_l + c_{i+1}h, y_l + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}k_{j,l}\right)\left(Y_l + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\frac{\partial k_{j,l}}{\partial y_l}Y_l\right)\\
&= \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(t_l + c_{i+1}h, y_l + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}k_{j,l}\right)\left(I + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\frac{\partial k_{j,l}}{\partial y_l}\right)Y_l\\
&= \frac{\partial k_{i+1,l}}{\partial y_l}Y_l
\end{aligned}$$

Quant-à $y_{l+1}$ et $Y_{l+1}$ on a

$$\begin{aligned}
y_{l+1} &= y_l + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_{i,l}\\
Y_{l+1} &= Y_l + h\sum_{i=1}^{s} b_i K_{i,l}\\
&= (I + h\sum_{i=1}^{s} b_i\frac{\partial k_{i,l}}{\partial y_l})Y_l\\
&= \frac{\partial y_{l+1}}{\partial y_l}Y_l
\end{aligned}$$

On déduit de ce résultat que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_N}{\partial y_0} &= \frac{\partial y_N}{\partial y_{N-1}}\frac{\partial y_{N-1}}{\partial y_{N-2}}\cdots\frac{\partial y_1}{\partial y_0}\\
&= Y_N
\end{aligned}$$

**1.3.** Si l'intégration est à pas variable le résultat est toujours vrai si le contrôle du pas lors de l'intégration du système variationnelle ne se fait que sur les composantes liées à la variable $y$. Sinon, lors de l'intégration numérique du système $(IVP)$ et $(EQVAR)$, on ne prend pas la même grille de discrétisation sur $[t_0, t_f]$ et les deux méthodes ne donnent pas le même résultat numérique.