Corrigé de l'examen d'EDO

▷ **Exercice 1.**

1.1. $A^2 = -\omega^2 I$ et

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I + tA - \frac{t^2}{2}\omega^2 I - \frac{t^3}{3!}\omega^2 A + \frac{t^4}{4!}\omega^4 I + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{(t\omega)^2}{2} + \frac{(t\omega^4)}{4!} + \cdots & \frac{1}{\omega}\left(t\omega - \frac{(t\omega)^3}{3!} + \cdots\right) \\ -\omega\left(t\omega - \frac{(t\omega)^3}{3!} + \cdots\right) & 1 - \frac{(t\omega)^2}{2} + \frac{(t\omega^4)}{4!} + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2. On pose $y_1(t) = y(t)$ et $y_2(t) = \dot{y}(t)$, le système (IVP) est alors équivalent à

$$(IVP)\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = -\omega^2 y_1(t) \\ y_1(t_0) = y_0 \\ y_2(t_0) = \dot{y}_0. \end{cases}$$

Par suite

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t)y_0 + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\dot{y}_0 \\ -\omega\sin(\omega t)y_0 + \cos(\omega t)\dot{y}_0 \end{pmatrix}.$$

1.3. Si on pose

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $B^2 = \omega^2 I$ et

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} \cosh(\omega t) & \frac{1}{\omega}\sinh(\omega t) \\ \omega\sinh(\omega t) & \cosh(\omega t) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{(B}\begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\omega t)y_0 + \frac{1}{\omega}\sinh(\omega t)\dot{y}_0 \\ \omega\sinh(\omega t)y_0 + \cosh(\omega t)\dot{y}_0 \end{pmatrix}.$$

▷ **Exercice 2.** On a

$$\frac{\partial y}{\partial\lambda}(t,\lambda) = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(s,y(s,\lambda),\lambda)\frac{\partial y}{\partial\lambda}(s,\lambda) + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(s,y(s,\lambda),\lambda)\right)ds.$$

Donc $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(.,\lambda)$ est solution du système

$$(VAR)\left\{\begin{array}{l}\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + b(t)\\ Y(t_0) = 0.\end{array}\right.$$

avec

$$A(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y(t,\lambda),\lambda) \quad \text{et} \quad b(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(t, y(t,\lambda),\lambda).$$

▷ **Exercice 3.**

3.1. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(R(t,t_0)^T R(t,t_0)) &= \frac{\partial}{\partial t}(R(t,t_0)^T)R(t,t_0) + R(t,t_0)^T\frac{\partial}{\partial t}R(t,t_0)\\ &= (A(t)R(t,t_0))^T R(t,t_0) + R(t,t_0)^T A(t)R(t,t_0)\\ &= R(t,t_0)^T(A(t)^T + A(t))R(t,t_0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

3.2. Par suite $R(t,t_0)^T R(t,t_0) = R(t_0,t_0)^T R(t_0,t_0) = I$, et pour tout t, $R(t,t_0)$ est une matrice orthogonale. Mais on sait que $\det(R(t,t_0)) = \exp(\int_{t_0}^{t} trace(A(s))ds) = 1$. On en déduit que $R(t,t_0)$ est une rotation. Comme toute rotation est une isométrie, elle conserve la norme. D'où le résultat.

▷ **Exercice 4.**

4.1. 1. $R(z) = 1 + z$.

2. C'est le disque de centre $(-1,0)$ et de rayon 1.

4.2. 1. $R(z) = \frac{1}{1-z}$.

2. C'est l'ensemble des points du plan extérieurs au disque de centre $(1,0)$ et de rayon 1.

4.3.

$$R(z) = (1 + zb^T(I - zA)^{-1}\mathbf{1})$$

.

4.4. Lorsque $Re(\lambda) < 0$ la solution tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Pour avoir le même comportement pour la solution calculée on désire donc avoir le demi plan des nombres complexes à partie réelle négative dans l'ensemble $\{z, |R(z)| \leq 1\}$.