Examen de l'UE Éléments d'analyse numérique
Corrigé

1 Partie Équations différentielles ordinaires

▷ **Exercice 1.**

1.1.

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

1.2.

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} q_0 \\ p0 \end{pmatrix}$$

1.3.

$$q_0 + ip_0 = q_m e^{i\varphi}$$

1.4. Posons

$$H(t) = p^2(t) + \omega^2 q^2(t)$$

alors

$$\dot{H}(t) = 2p(t)\dot{p}(t) + 2\omega^2 q(t)\dot{q}(t) = 0.$$

▷ **Exercice 2.**

2.1.

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 + hp_0 \\ p_1 &= p_0 - hq_0 \end{aligned}$$

Donc

$$||y_1||^2 = (1 + h^2)||y_0||^2.$$

2.2.

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 + hp_1 \\ p_1 &= p_0 - hq_1 \end{aligned}$$

Donc

$$||y_1||^2 = ||y_0||^2 + h^2||y_1||^2.$$

D'où le résultat

2.3.

$$q_1 = q_0 + hp_1 \tag{1}$$
$$p_1 = p_0 - hq_0 \tag{2}$$

Multiplions l'équation (1) par q_1 et l'équation (2) par p_1 et additionnons le résultat, obtient alor

$$q_1^2 + p_1^2 - hp_1q_1 = q_0q_1 + p_0p_1 - hq_0p_1.$$

Multiplions maintenant l'équation (1) par q_0 et l'équation (2) par p_0 et additionnons, on obtient alors

$$q_0q_1 + p_0p_1 - hq_0p_1 = q_0^2 + p_0^2 - hp_0q_0.$$

2.4. Quels commentaires pouvez-vous faire sur ces deux exercices ? La solution du système est un cercle dans le plan de phase. Le comportement numérique des m'éthodes d'Euler est (cf. la figure 1) :
– Pour la méthode d'Euler explicite, le rayon croit ;
– Pour la méthode d'Euler explicite, le rayon décroit ;
– Pour la méthode d'Euler symplectique de type A la trajectoire numérique est une ellipse proche du cercle solution.

▷ **Exercice 3.**

3.1. On pose $k = (k_1, k_2, k_3)$ et

$$A = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_3 \\ k_1 & -k3 \end{pmatrix}$$

Le systète (EDO) s'écrit alors

$$(EDO) \begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) \\ y_1(0) = c_0 \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

On a alors $\frac{\partial r_i(\beta)}{\partial c_0} = \frac{\partial y_1}{\partial c_0}(t_i, c_0, k) \in \mathbf{R}$ qui est la première composante de la solution à l'instant t_i du problème de Cauchy linéaire ($Y(t) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$)

$$(VAR_{c_0}) \begin{cases} \dot{Y}(t) = AY(t) \\ Y_1(0) = 1 \\ Y_2(0) = 0, \end{cases}$$

3.2. En identifiant les dérivées avec leurs matrices jacobiennes on a

$$\frac{\partial r_i(\beta)}{\partial k} = \frac{\partial y_1}{\partial k}(t_i, c_0, k) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbf{R})$$

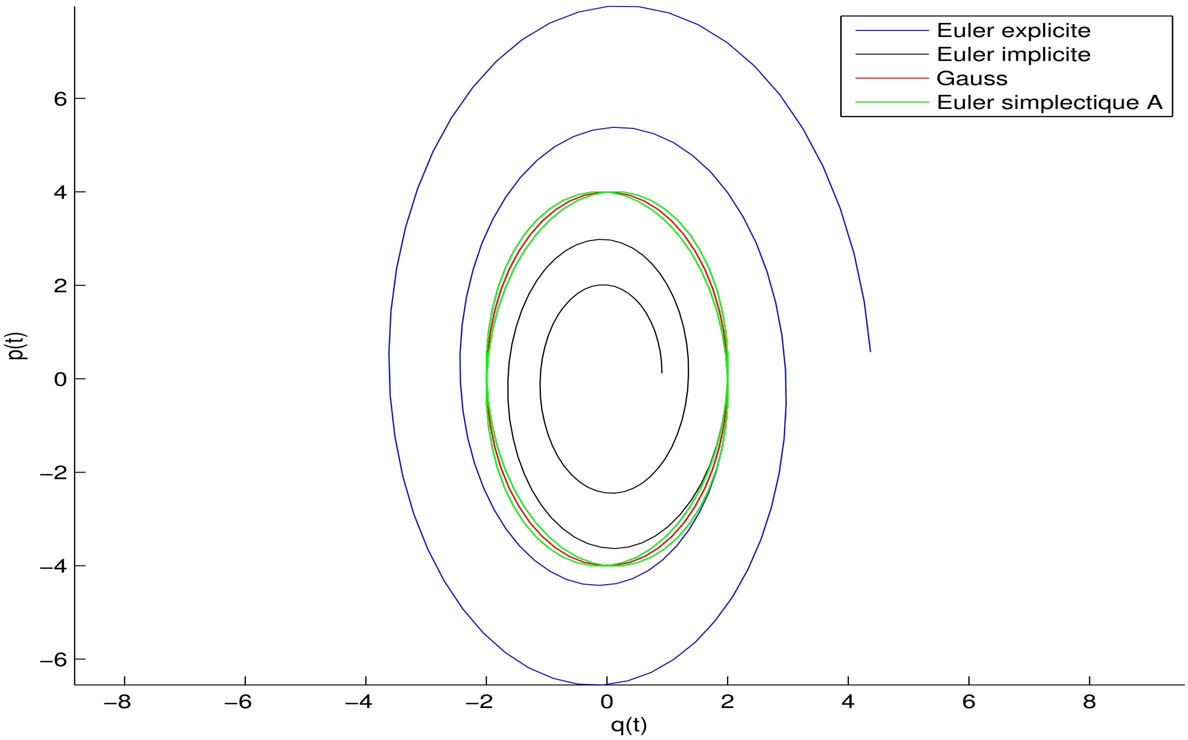

FIGURE 1 – *Sollution numérique de différentes méthode d'Euler appliquées à l'oscillateur harmonique avec $h = 0.15$. La valeur initiale est le point noir.*

qui est la première ligne de la solution à l'instant t_i du problème de Cauchy linéaire ($Y(t) \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$)

$$(VAR_k) \begin{cases} \dot{Y}(t) = AY(t) + B(t) \\ Y(0) = 0, \end{cases}$$

avec $B(t) = \begin{pmatrix} -y_1(t, c_0, k) & -y_2(t, c_0, k) & y_2(t, c_0, k) \\ y_1(t, c_0, k) & 0 & -y_2(t, c_0, k) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbf{R})$. où

$$y(t, c_0, k) = \begin{pmatrix} y_1(t, c_0, k) \\ y_2(t, c_0, k) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$