Examen de l'UE Éléments d'analyse numérique
Corrigé

1 Partie équation différentielles ordinaires

▷ **Exercice 1.** (4 points)

1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la fonction b est

$$\begin{array}{rccl} b : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \end{array}$$

.

1.2.

$$e^{tA} = Pe^{t\Lambda}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2i} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

1.3. Ici $R(t, t_0) = e^{tA}$ et donc

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds \\ &= e^{tA}y_0 + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}b(s)ds \\ &= e^{tA}y_0 + e^{tA}\int_0^t s\begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s \end{pmatrix} ds \quad = \begin{pmatrix} y_{01}\cos t - y_{02}\sin t + \sin t - t \\ y_{01}\sin t + y_{02}\cos t - \cos t + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

▷ **Exercice 2.** (4 points)

2.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = \varphi(t_0, y_0 + h((1/6)k_1 - (1/3)k2 + (1/6)k3)) \\ k_2 = \varphi(t_0 + (1/2)h, y_0 + h((1/6)k_1 + (5/12)k2 - (1/12)k3)) \\ k_3 = \varphi(t_0 + h, y_0 + h((1/6)k_1 + (2/3)k2 + (1/6)k3)) \\ y_1 = y_0 + h((1/6)k_1 + (2/3)k_2 + (1/6)k_3) \end{array} \right.$$

2.2. Ce schéma est implicite.

2.3.

$$\begin{pmatrix} I-(h/6)A & (h/3)A & -(h/6)A \\ (h/6)A & I-(5h/12)A & (h/12)A \\ -(h/6)A & -(2h/3)A & I-(h/6)A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ay_0+b \\ Ay_0+b \\ Ay_0+b \end{pmatrix},$$

où I est la matrice identité (n,n). Le système est de dimension $3n$.

▷ **Exercice 3.**

3.1. On pose $y(t) = (x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$ et $y_0 = (x_{01}, x_{02}, v_{01}, v_{02})$. Le système s'écrit alors

$$(IVP)_1 \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = y_3(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_4(t) \\ \dot{y}_1(t) = -\dfrac{\mu y_1(t)}{||r(t)||^3} \\ \dot{y}_2(t) = -\dfrac{\mu y_2(t)}{||r(t)||^3} \\ y(0) = y_0. \end{array} \right.$$

avec $r(t) = (y_1(t), y_2(t))$. On a donc φ qui est définie par

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ (s,z) & \longmapsto & \varphi(s,z) = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ -\dfrac{\mu z_1}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}^3} \\ -\dfrac{\mu z_2}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}^3} \end{pmatrix} \end{array}$$

3.2.

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0) \in \mathcal{M}_{(4,4)}(\mathbf{R}).$$

3.3. On pose $r(t, y_0) = (y_1(t, y_0), y_2(t, y_0))$,

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(., y_0)$$

est alors solution de

$$(VAR) \left\{ \begin{array}{l} \dot{Y}(t) = A(t)Y(t) \\ Y(0) = I, \end{array} \right.$$

avec

$$A(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t, y(t, y_0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\mu}{||r(t,y_0)||^3} + \frac{3\mu y_1^2(t,y_0)}{||r(t,y_0)||^5} & \frac{3\mu y_1(t,y_0) y_2(t,y_0)}{||r(t,y_0)||^5} & 0 & 0 \\ \frac{3\mu y_1(t,y_0) y_2(t,y_0)}{||r(t,y_0)||^5} & -\frac{\mu}{||r(t,y_0)||^3} + \frac{3\mu y_2^2(t,y_0)}{||r(t,y_0)||^5} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$