Corrigé de l'examen d'EDO
Jeudi 28 janvier 2010

▷ **Exercice 1.** (6 points) $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ sont les valeurs propres de A.

1.1. – Si $\beta = 0$ alors $A = \alpha I$ et toute base de $\mathbf{C}^2$ est une base de vecteurs propres.
– Sinon on peut prendre respectivement

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} e^{tA} = Pe^{t\Lambda}P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(\alpha - i\beta)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha+i\beta)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} \\ &= e^{\alpha t} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i(e^{it\beta} + e^{-it\beta}) & e^{-it\beta} - e^{it\beta} \\ e^{it\beta} - e^{-it\beta} & i(e^{-it\beta} + e^{it\beta}) \end{pmatrix} \\ &= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2. On considère maintenant le problème de Cauchy

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1(t) = \alpha y_1(t) - \beta y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = \beta y_1(t) + \alpha y_2(t) \\ y(0) = (1, 0). \end{array} \right.$$

On a $\dot{y}(t) = Ay(t)$. Par suite la solution est

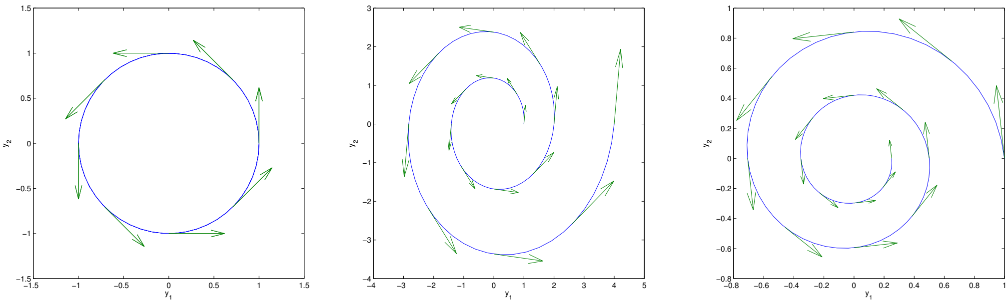
$$y(t) = e^{tA} y_0.$$

Ce qui donne ici

$$y(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ \sin(\beta t) \end{pmatrix}.$$

1.3.

$\alpha = 0$ et $\beta = 1$ $\alpha = \log(2)/(2\pi)$ et $\beta = 1$ $\alpha = -\log(2)/(2\pi)$ et $\beta = 1$



cas (a) cas (b) cas (c)

▷ **Exercice 2.** (4 points)

2.1.

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0) = \frac{1}{((t-t_0)y_0+1)^2}.$$

2.2.

$$(VAR)\begin{cases} \dot{Y}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y(t, y_0))Y(t) = -2y(t, y_0)Y(t) = -2\frac{y_0}{((t-t_0)y_0+1)}Y(t) \\ Y(t_0) = I = 1. \end{cases}$$

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(t_0, y_0) = 1$$

et

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0) = -2\frac{y_0}{((t-t_0)y_0+1)^3} = -2y(t, y_0)\frac{\partial y}{\partial y_0}(t, y_0)$$

▷ **Exercice 3.** (8 points) On considère la méthode à un pas suivante

$$y_1 = y_0 + h(\alpha\varphi(t_0, y_0) + \beta\varphi(t_0 + h/2, y_0 + (h/2)\varphi(t_0, y_0)) + \gamma\varphi(t_0 + h, y_0 + h\varphi(t_0, y_0))).$$

3.1.

$$\begin{aligned} k_1 &= \varphi(t_0, y_0) \\ k_2 &= \varphi(t_0 + h/2, y_0 + (h/2)k_1) \\ k_3 &= \varphi(t_0 + h, y_0 + hk_1) \\ y_1 &= y_0 + h(\alpha k_1 + \beta k_2 + \gamma k_3) \end{aligned}$$

Le tableau de Butcher associé est donc (*cf.* table 1).

3.2. – $\alpha = 1, \beta = 0$ et $\gamma = 0$ pour la méthode d'Euler.
– $\alpha = 0, \beta = 1$ et $\gamma = 0$ pour la méthode du point milieu.
– $\alpha = 1/2, \beta = 0$ et $\gamma = 1/2$ pour la méthode des trapèzes.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$

Table 1 – *Tableau de Butcher.*

3.3. – Pour la consistance. Il faut $\Phi(t, y, 0) = \varphi(t, y) \Longleftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 1$.
– Pour que l'ordre soit ≥ 1. On a

$$\begin{aligned} y(t_0 + h) &= y_0 + h\dot{y}(t_0) + O(h^2) \\ &= y_0 + h\varphi(t_0, y_0) + O(h^2) \\ y_1 &= y_0 + h\Phi(t_0, y_0, h) \\ &= y_0 + h(\alpha\varphi(t_0, y_0) + \beta\varphi(t_0, y_0) + \gamma\varphi(t_0, y_0) + O(h)) \\ &= y_0 + h(\alpha + \beta + \gamma)\varphi(t_0, y_0) + O(h^2). \end{aligned}$$

Par suite l'ordre sera ≥ 1 si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
– Pour que l'ordre soit ≥ 2.

$$\begin{aligned} y(t_0 + h) &= y_0 + h\dot{y}(t_0) + (h^2/2)\ddot{y}(t_0) + O(h^3) \\ &= y_0 + h\varphi(t_0, y_0) + (h^2/2)(\varphi_t(t_0, y_0) + \varphi_y(t_0, y_0)\varphi(t_0, y_0)) + O(h^3) \\ y_1 &= y_0 + h\Phi(t_0, y_0, h) \\ &= y_0 + h(\alpha\varphi(t_0, y_0) + \beta(\varphi(t_0, y_0) + (h/2)(\varphi_t(t_0, y_0) + \varphi_y(t_0, y_0)\varphi(t_0, y_0))) \\ &+ \gamma(\varphi(t_0, y_0) + h(\varphi_t(t_0, y_0) + \varphi_y(t_0, y_0)\varphi(t_0, y_0))) + O(h^2)) \\ &= y_0 + h(\alpha + \beta + \gamma)\varphi(t_0, y_0) + (h^2/2)(\beta + 2\gamma)(\varphi_t(t_0, y_0) + \varphi_y(t_0, y_0)\varphi(t_0, y_0)) + O(h^3). \end{aligned}$$

Par suite l'ordre sera ≥ 2 si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $\beta + 2\gamma = 1$.

3.4. On considère maintenant dans $\mathbf{R}$ le problème de Cauchy

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = y(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{array} \right.$$

$$y_1 = y_0(1 + (\alpha + \beta + \gamma)h + (\beta + 2\gamma)(h^2/2)).$$

Mais la solution exacte est

$$y(t_0 + h) = y_0 e^h = y_0(1 + h + h^2/2 + h^3/6 + O(h^4))$$

Le schéma ne peut donc être d'ordre ≥ 3.

▷ **Exercice 4.** (3 points) Le but de cet exercice est de démontrer que toute méthode de Runge-Kutta explicite est stable. On suppose que la fonction

$\varphi(t,y)$ est lipschitzienne par rapport à la variable y de constante L et on note le schéma de la façon suivante

$$\begin{aligned}
z_1 &= y_0\\
z_2 &= y_0 + ha_{21}\varphi(t_0, z_0)\\
&\vdots\\
z_s &= y_0 + h\sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}\varphi(t_0 + c_j h, z_j)\\
y_1 &= y_0 + h\Phi(t_0, y_0, h) = y_0 + h\sum_{j=1}^{s} b_j\varphi(t_0 + c_j h, z_j).
\end{aligned}$$

4.1. On suppose que les $\widetilde{z}_i$ sont obtenues de façon identique à partir de $\widetilde{y}_0$ et on pose $\alpha = \max_i(\sum_j |a_{ij}|)$. Montrer que l'on a pour tout $i = 1, \dots, s$

$$||z_i - \widetilde{z}_i|| \leq (1 + (\alpha L h) + \cdots + (\alpha L h)^{i-1})||y_0 - \widetilde{y}_0||.$$

Effectuons un raisonnement par récurrence. La propriété est vraie pour $i = 1$ car $||z_1 - \widetilde{z}_1|| = ||y_0 - \widetilde{y}_0||$. Supposons la vraie pour i et montrons la pour $i + 1$.

$$\begin{aligned}
||z_{i+1} - \widetilde{z}_{i+1}|| &\leq ||y_0 - \widetilde{y}_0|| + h\sum_{j=1}^{i} |a_{ij}|L||z_j - \widetilde{z}_j||\\
&\leq ||y_0 - \widetilde{y}_0|| + h\sum_{j=1}^{i} |a_{ij}|L(\max_{j\leq i} ||z_j - \widetilde{z}_i||)\\
&\leq ||y_0 - \widetilde{y}_0||(1 + h\alpha L(1 + \cdots + (\alpha L h)^{i-1}))\\
&\leq ||y_0 - \widetilde{y}_0||(1 + \alpha L h + \cdots + (\alpha L h)^{i})).
\end{aligned}$$

4.2. Montrer que $\Phi(t, y, h)$ est lipchitzienne par rapport à la variable y de constante

$$\Lambda = L\sum_{i=1}^{s} |b_i|(1 + (\alpha L h) + \cdots + (\alpha L h)^{i-1}).$$

On a

$$\begin{aligned}
||\Phi(t, y_0, h) - \Phi(t, \widetilde{y}_0, h)|| &\leq \sum_{i=1}^{s} |b_i|L||z_i - \widetilde{z}_i||\\
&\leq L\sum_{i=1}^{s} |b_i|(1 + (\alpha L h) + \cdots + (\alpha L h)^{i-1})||y_0 - \widetilde{y}_0||.
\end{aligned}$$

4.3. En déduire que toute méthode de Runge-Kutta explicite est stable.

Il suffit d'appliquer le théorème (IV.9) du cours.