Examen de l'UE Éléments d'analyse numérique
Corrigé

1 Partie équation différentielles ordinaires

▷ **Exercice 1.** (6 points)

1.1.

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbf{R}\times\mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}\\ (t,y) &\longmapsto \varphi(t,y)\end{aligned}$$

$$\varphi(t,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1,\\ t-1 & \text{si } t > 1.\end{cases}$$

1.2. $\Omega = \mathbf{R}^2$, φ est continue et la dérivée partielle $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,y) = 0$ pour tout $(t,y) \in \Omega$. Par suite φ est lipschitzienne de constante $k = 0$ sur tout Ω. On peut donc appliquer le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy Lipschitz.

Remarque 1.1. *On a même ici en appliquant le corollaire (I.11) du chapitre 3 du cours l'existence sur l'intervalle $I = \mathbf{R}$.*

1.3.

$$\begin{aligned}y : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}\\ y &\longmapsto y(t)\end{aligned}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1],\\ (t-1)^2/2 & \text{si } t > 1.\end{cases}$$

1.4.

1. Euler

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(t_i,y_i) = y_i = 0.$$

2. rk2

$$\begin{aligned}&k_1 = \varphi(t_i,y_i) = y_i = 0\\ &k_2 = \varphi(t_i+h/2, y_i + (h/2)\varphi(t_i,y_i))\\ &y_{i+1} = y_i + hk_2\end{aligned}$$

— Cas 1 $t_i + h/2 < 1$, alors $k_2 = 0$ et
$y_{i+1} = 0$.
— Cas 2, $t_i + h/2 > 1$, alors $k_2 = t_i + h/2 - 1$ et
$y_{i+1} = k(t_i + h/2 - 1)$.

1.5. Pour les deux schémas on trouve sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ ci-dessus comme erreur locale

$$e_i = |y(t_{i+1}, y_i) - y_{i+1}| = O(h^2).$$

Par suite ces deux schémas sont d'ordre 1.

Dans le cours Euler est d'ordre 1 et rk2 d'ordre 2. On ne retrouve pas sur cet exemple le résultat pour rk2 car la fonction φ n'est pas dérivable sur Ω et donc la solution $y(t)$ n'est pas dérivable deux fois.

▷ **Exercice 2.** (3 points)

2.1. La dérivée partielle

$$\frac{\partial y}{\partial \theta}(t, y_0, \theta_0) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2).$$

La dimension de la matrice jacobienne associée est donc $(2, 3)$.

2.2.

$$\frac{\partial y}{\partial \theta}(., y_0, \theta_0)$$

est solution de

$$(VAR) \left\{ \begin{array}{l} \dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + B(t) \\ y(0) = 0. \end{array} \right.$$

avec $Y(t) \in \mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbf{R})$,

$$A(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, y(t, y_0, \theta_0)) = \begin{pmatrix} c_0 - c_0 y_1^2(t, y_0, \theta_0) & c_0 \\ -1/c_0 & -b_0/c_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbf{R})$$

et

$$\begin{array}{rl} B(t) & = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(t, y(y, y_0, \theta_0)) \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_1(t, y_0, \theta_0) - y_1^3(t, y_0, \theta_0)/3 + y_2(t, y_0, \theta_0) \\ 1/c_0 & -y_2(t, y_0, \theta_0)/c_0 & (1/c_0^2)(y_1(t, y_0, \theta_0) - a + b y_2(t, y_0, \theta_0)) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbf{R}). \end{array}$$

▷ **Exercice 3.** (4 points)

3.1.

$$y^{(1)}(t) = y_0 + tAy_0.$$
$$y^{(2)}(t) = y_0 + tAy_0 + (t^2/2)A^2 y_0.$$

3.2.

$$y^{(k)}(t) = y_0 + tAy_0 + \cdots + (t^k/k!)A^k y_0.$$

3.3. $y^{(k)}(t)$ tend vers $e^{tA} y_0$.