Équations Différentielles Ordinaires
Sortie dense et dérivées

J. Gergaud

2ième année département Informatique et Mathématiques Appliquées
Majeure Mathématique

14 janvier 2010

Introduction

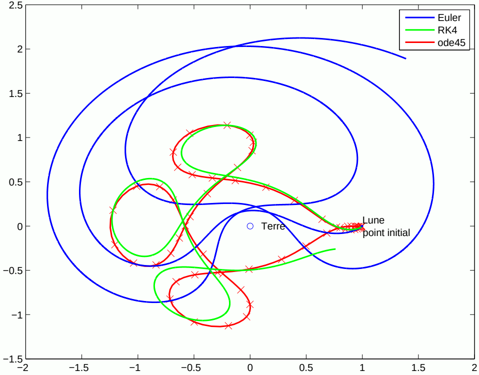

FIGURE: *Orbite d'Arenstorf calculée avec Euler (24000 pas équidistants),* RK4 *(6000 pas équidistants) et* ODE45 *(64 pas variables), E. Hairer, S.P. Nørsett and G. Wanner, Tome I, page 130.*

Détection d'évènements : Balle qui rebondie

Exemple (Balle qui rebondie)

```
>> help ballode
 BALLODE  Run a demo of a bouncing ball.
    This is an example of repeated event location, where the initial
    conditions are changed after each terminal event.  This demo computes ten
    bounces with calls to ODE23.  The speed of the ball is attenuated by 0.9
    after each bounce. The trajectory is plotted using the output function
    ODEPLOT.

    See also ODE23, ODE45, ODESET, ODEPLOT, FUNCTION_HANDLE.

>> orbitode
```

Problème aux trois corps restreint

Exemple (Problème aux trois corps restreint)

```
>> help orbitode
 ORBITODE  Restricted three body problem.
    This is a standard test problem for non-stiff solvers stated in Shampine
    and Gordon, p. 246 ff.  The first two solution components are
    coordinates of the body of infinitesimal mass, so plotting one against
    the other gives the orbit of the body around the other two bodies.  The
    initial conditions have been chosen so as to make the orbit periodic.
    Moderately stringent tolerances are necessary to reproduce the
    qualitative behavior of the orbit.  Suitable values are 1e-5 for RelTol
    and 1e-4 for AbsTol.

    ORBITODE runs a demo of event location where the ability to
    specify the direction of the zero crossing is critical.  Both
    the point of return to the initial point and the point of
    maximum distance have the same event function value, and the
    direction of the crossing is used to distinguish them.

>> orbitode
```

Algorithme de détection

L'objectif est de déterminer l'instant t tel que $\psi(t, y(t)) = 0 \in \mathbf{R}$.

si $\psi(t_i, y_i)\psi(t_{i+1}, y_{i+1}) \leq 0$ **alors**
Déterminer $\tau = t_i + \theta h_i$ et y_τ, $\theta \in [0, 1]$ tel que $g(\theta) = \psi(t_i + \theta h, u(\theta)) = 0$ $\{u(\theta)$ est la sortie dense sur $[t_i, t_{i+1}]$.$\}$
$t_{i+1} = t_i + \theta h_i$
$y_{i+1} = u(t_i + \theta h_i)$
fin si

Équations différentielles discontinues

$$(IVP)\left\{\begin{array}{lll} \dot{y}(t) = t^2 + 2y^2(t) & \text{si} & (t+0.05)^2 + (y(t)+0.15)^2 \leq 1 \\ \dot{y}(t) = 2t^2 + 3y^2(t) - 2 & \text{si} & (t+0.05)^2 + (y(t)+0.15)^2 > 1 \end{array}\right.$$

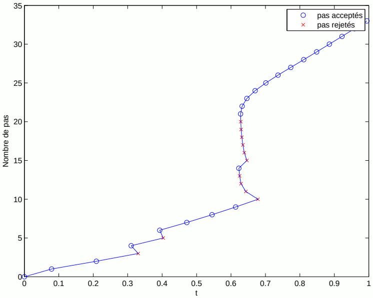

FIGURE: *Utilisation du pas variable, programme* `myode43.m`*, E. Hairer, S.P. Nørsett and G. Wanner, Tome I, page 197.*

Algorithme

Initialisation

ind = indice du champ de vecteur

$i := 0$

$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi_{ind}(t_i, y_i, h_i)$

si $\psi(y_i)\psi(y_{i+1}) \leq 0$ **alors**

  Déterminer $\tau = t_i + \theta h_i$ et y_τ, $\theta \in [0, 1]$ tel que $g(\theta) = \psi(t_i + \theta h_i, u(\theta)) = 0$ {$u(\theta)$ est la sortie dense sur $[t_i, t_{i+1}]$.}

  ind :=switch(ind)

  Calculer un pas tronqué $y_{i+1} := y_\tau + \Phi_{ind}(\tau, y_\tau, (1-\theta)h_i)$

fin si

Calcul de la dérivée

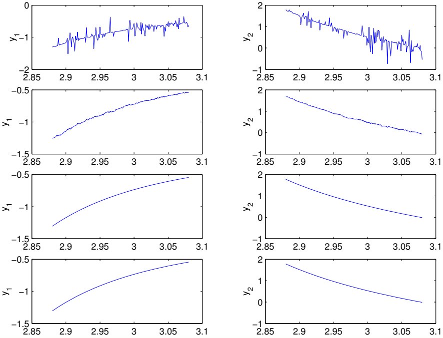

FIGURE: Dérivée de la solution par rapport à λ $\frac{\partial y_1(t_f,\lambda)}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial y_2(t_f,\lambda)}{\partial \lambda}$ pour (de haut en bas) : les différences finies avants ($\delta\lambda = 4\,Tol$), les différences finies avants ($\delta\lambda = \sqrt{Tol}$), la différentiation interne de Bock ($\delta\lambda = \sqrt{macheps}$) et l'équation variationnelle. On utilise le code ODE45 de MATLAB avec $Atol = Rtol = Tol = 10^{-4}$.

Équation de Curtiss

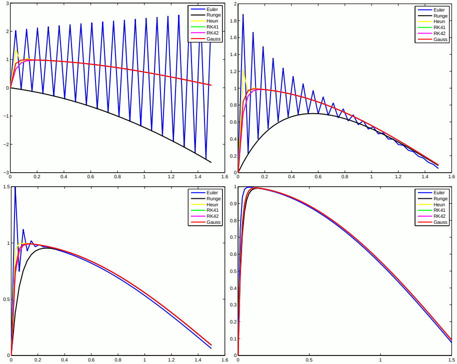

FIGURE: *Solution calculée pour* $N = E(50t_f/1.974), E(50t_f/1.875), 50$ *et* 100, $\dot{y}(t) = -50(y(t) - \cos(t)), y(0) = 0.$