# TD 2 – Optimisation
# Calcul de dérivées

▷ **Exercice 1.** On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \ln(\sin^2(x) + 1) \end{array}$$

**1.1.** Calculer la dérivée de $f$

**1.2.** Calculer la dérivée seconde de $f$

▷ **Exercice 2.** On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 3x_1^2 + (x_1 - x_3)^2 - 4x_2x_3 \end{array}$$

**2.1.** Calculer la dérivée et la dérivée seconde de $f$

▷ **Exercice 3.** On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x_1 - x_2 \exp(-x_3 t^{x_4}) \end{array}$$

où $t$ est une constante.

**3.1.** Calculer la dérivée et la dérivée seconde de $f$

▷ **Exercice 4.** On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \cos x \end{array}$$

**4.1.** Calculer la dérivée première et seconde de $f$.

**4.2.** Écrire $f$ sour la forme

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + x^2 \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers 0.

▷ **Exercice 5.** On considère le problème suivant

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} Min f(x) \\ x \in \mathbf{R}^3 \end{array} \right.$$

où $f$ est la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x =^t (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 x_2) + \sin x_3 \end{array}$$

**5.1.** Calculer la dérivée et la dérivée seconde de $f$

**5.2.** Écrire $f$ sous la forme

$$f(x) = f(0) + (\nabla f(0)/x) + \frac{1}{2}(\nabla^2 f(0)x/x) + \|x\|^2\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $\vec{0}$.

▷ **Exercice 6.** On considère cas de la régression linéaire simple (cf. TD1).

**6.1.**

calculer à la main la dérivée de la fonction à minimiser et vérifier que l'on trouve :

$$\nabla f(\beta) = {}^t f'(\beta) = {}^t XX\beta - {}^t Xy$$

**6.2.** Vérifiez de même que :

$$\nabla^2 f(\beta) = {}^t XX$$

**6.3.** Calculer les formules ci-dessus.

(i) Ecrire $f(\beta) = g \circ r(\beta)$. On donnera $r$ et $g$.

(ii) Calculer $g'(z)$ et $r'(\beta)$.

(iii) Calculer $f'(\beta)$ à l'aide de la formule de la dérivée des fonctions composées.

(iv) En déduire $\nabla f(\beta)$ et $\nabla^2 f(\beta)$.

*Sujets en ligne sous* `www.n7.fr/ gergaud/teaching`