



## TD 3 – Optimisation

### Existence de solution, condition nécessaire

▷ **Exercice 1.** On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Min } f(x) = x^2 - 1 \\ x \in ]0, 1] \end{cases}$$

1.1.  $(\mathcal{P})$  a-t-il une solution ?

1.2. Quelle hypothèse du théorème d'existence de solution n'est pas vérifiée ?

▷ **Exercice 2.** On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Min } f(x) = x_1^2 - x_2^2 \\ x \in \mathbf{R}^2 \end{cases}$$

2.1. Donner la condition nécessaire de solution du premier ordre

2.2. La condition nécessaire du deuxième ordre est-elle vérifiée ?

2.3.  $(\mathcal{P})$  a-t-il une solution ?

▷ **Exercice 3.** On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Min } f(x) = x_1^4 + x_2^4 + 3x_1x_2 \\ x \in \mathbf{R}^2 \end{cases}$$

3.1. Donner la condition nécessaire de solution du premier ordre

3.2. La condition nécessaire et la condition suffisante du deuxième ordre sont-elles vérifiées ?

3.3.  $(\mathcal{P})$  a-t-il une solution ?

(i) On considère le problème d'optimisation suivant

$$(\mathcal{P}_\theta) \begin{cases} \text{Min } g(\theta) = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Démontrer que  $(\mathcal{P}_\theta)$  a une solution  $\theta^*$  et que  $g(\theta^*) = k > 0$ .

(ii) On pose

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \end{pmatrix}$$

Montrer que  $f(x) \geq k\rho^4 + 3\rho^2 \cos \theta \sin \theta$ .

(iii) Conclure sur l'existence de solution du problème  $(\mathcal{P})$ .

▷ **Exercice 4.** On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Min } f(x) = x_1^4 + x_2^2 + x_3^4 \\ x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

4.1. Donner la condition nécessaire de solution du premier ordre

4.2. La condition nécessaire et la condition suffisante du deuxième ordre sont-elles vérifiées ?

4.3.  $(\mathcal{P})$  a-t-il une solution ?

▷ **Exercice 5.** On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Min, } f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^4 \\ x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

5.1. Donner la condition nécessaire de solution du premier ordre

5.2. La condition nécessaire et la condition suffisante du deuxième ordre sont-elles vérifiées ?

5.3.  $(\mathcal{P})$  a-t-il une solution ?

5.4. Existe-t-il un minimum local

*Sujets en ligne sous [www.n7.fr/](http://www.n7.fr/) gergaud/teaching*