Optimisation
Chapitre 1: exemples

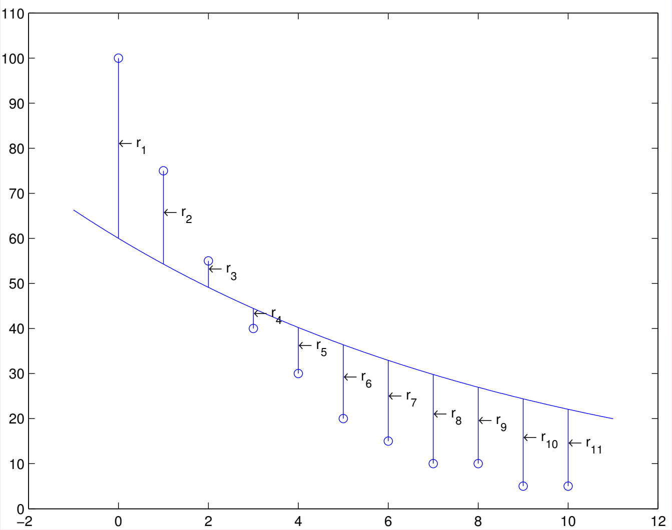
Joseph Gergaud

6 décembre 2005

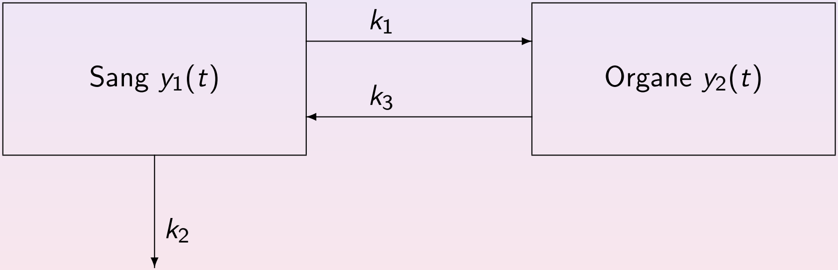
Tension: Données

t_i	U_i	t_i	U_i
0	100	6	15
1	75	7	10
2	55	8	10
3	40	9	5
4	30	10	5
5	20		

Tension: résidus



Modèle à compartiments



Données

Les concentrations dans le sang sont mesurées à différents instants:

t_i	y_{i1}	t_i	y_{i1}
0.25	215.6	3.00	101.2
0.50	189.2	4.00	88.0
0.75	176.0	6.00	61.6
1.00	162.8	12.00	22.0
1.50	138.6	24.00	4.4
2.00	121.0	48.00	0.0

Modèle Mathématique

Le système d'équations différentielles décrivant le modèle est le suivant:

$$(EDO)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \dot{y}_1(t) = -(k_1+k_2)y_1(t) + k_3 y_2(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \dot{y}_2(t) = k_1 y_1(t) - k_3 y_2(t) \\ y_1(0) = c_0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Problème aux moindres carrées

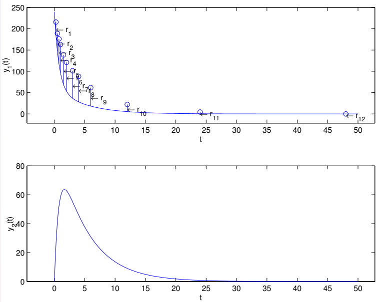


FIG.: Données, courbe pour $\beta = (0.5{,}0.55{,}0.5{,}240)$ et résidus

$$(P)\left\{\begin{array}{l} Min \quad f(\beta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i1} - y_1(t_i;\beta))^2 = \frac{1}{2}||r(\beta)||^2 \\ \beta = {}^t(c_0,k_1,k_2,k_3) \in \mathbf{R}^4 \end{array}\right.$$

Problèmes

Un fermier désire déterminer les quantités de lisier de porc et d'engrais composé à étendre sur 20 ha de prairie de façon à optimiser le coût total de la fertilisation. Le coût et la composition du lisier et de l'engrais sont donnés ci-dessous:

	coût (par tonne)	composition chimique (kgt^{-1})		
		azote	phosphate	potasse
lisier	25 francs	6	1.5	4
engrais	1300 francs	250	100	100

Le fermier veut appliquer au moins 75 $kgha^{-1}$ d'azote, 25 $kgha^{-1}$ de phosphate et 35 $kgha^{-1}$ de potasse. Il ne peut appliquer le lisier qu'à un taux maximum de 8 $t/heure$ et l'engrais qu'à un taux maximum de 0.4 $t/heure$. Il ne peut de plus consacrer pour ce travail qu'un maximum de 25 heures.

Problème du sac à dos de Knapsack

Un alpiniste veut mettre dans son sac à dos un maximum de 16 kg de ravitaillement. Il peut choisir un certain nombre d'unités de trois produits différents. Le poids unitaire en kilogrammes et la valeur énergétique unitaire des ces produits sont connus et donnés ci-dessous.

Produits	I	II	III
Poids	2	5	7
Valeurs	4	10	15

Le problème pour l'alpiniste est de savoir ce qu'il doit emporter pour avoir une valeur totale en calories maximale sans dépasser les 16 kg.

Service hospitalier

Dans un service hospitalier, les malades i attendent d'être opérés. Le malade i a besoin d'une durée d'opération D_i. D'autre part, compte tenu des disponibilités des chirurgiens, la somme des durées des opérations possibles chaque jours j de la période étudiée est connue et égale à T_j. On veut minimiser la somme des pénalités d'attente pour les différents malades. On note:

- $x_{ij} = 1$ si le malade i est opéré le jour j;
- $x_{ij} = 0$ si le malade i n'est pas opéré le jour j;
- c_{ij} la pénalité du malade i s'il est opéré le jour j. c_{ij} est une fonction croissante de j.

Alignement de séquence

Soit 2 séquences $CTGTATC$ et $CTATAATCCC$. On désire trouver le "meilleur" alignement possible. A chaque alignement, est associé un score (simple ici) suivant: pour chaque position on associe 0 si les 2 bases sont identiques, $+1$ si les deux bases sont différentes et $+3$ s'il y a un "trou". On effectue ensuite la somme. La figure (3) donne un exemple de la fonction score S.

$$\begin{array}{cccccccccccccc} C & T & A & T & - & A & A & - & T & C & C & C & & \\ - & - & C & T & G & T & A & T & C & - & - & - & & \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & = & 24 \end{array}$$

FIG.: Exemple de calcul d'un score