TD d'algèbre linéaire

J. Gergaud, S. Pralet, L. Gentzbittel

Octobre 2005

Table des matières

Chapitre 1

TD1 : Rappels d'algèbre linéaire

Exercice 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (1/18)\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $det(A)$ en développant par rapport à la première colonne et par rapport à la deuxième ligne.
2. Calculer Bv.
3. Résoudre $Ax = v$. Commentaires.
4. Calculer AB, BA. Commentaires.

Exercice 2 : Soient v_1 et v_2 deux vecteurs colonnes non nuls de taille n. Soit $A = v_1{}^t v_2$.
1. Quelle est la taille de A ?
2. Calculer $Ker(A)$. Quelle est alors la dimension de l'image ?
3. Calculer $Im(A)$.
4. Calculer A^2.
5. On pose $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Que représente A ? On visualisera dans $\mathbb{R}^2$, $Ker(A)$, $Im(A)$ et l'image par A du point $(3, 5)$.
6. Maintenant $v_1 = v_2$ est un vecteur normé. Que représente A ?

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n})$ deux bases orthonormées de E. Pour éviter toute confusion entre un vecteur et ses coordonnées dans une base nous garderons les $\rightarrow$ sur les vecteurs. Nous noterons $(\overrightarrow{x}/\overrightarrow{y})$, le produit scalaire entre deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de E. Soit $\overrightarrow{x} \in E$ de coordonnées

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{B} \text{ et } x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{B}',$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^n x'_i \overrightarrow{e'_i}$. Soit $P = (p_{ij})$, la matrice telle que les composantes de la j^{eme} colonne de P sont les coordonnées de $\overrightarrow{e'_j}$ dans $\mathcal{B}$, *ie* $\overrightarrow{e'_j} = \sum_{i=1}^n p_{ij} \overrightarrow{e_i}$. P est appelée la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

1. Montrer les propriétés suivantes :

- $\overrightarrow{x} = \sum_{j=1}^{n} (\overrightarrow{x}/\overrightarrow{e'_j})\overrightarrow{e'_j}$, ie, $x'_j = (\overrightarrow{x}/\overrightarrow{e'_j}) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}x_i = {}^t x p_{.j} = {}^t p_{.j} x$
- $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{x}/\overrightarrow{e_i})\overrightarrow{e_i}$, ie, $x_i = (\overrightarrow{x}/\overrightarrow{e_i})$
- $x = Px'$
- $x' = P^{-1}x = {}^t P x$

On se place dans $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{B}$ est la base canonique. Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ de coordonnées dans $\mathcal{B}$ respectivement $u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. On prend $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$. Soit $\overrightarrow{x}$ de coordonnées $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{y}$ de coordonnées $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

2. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée.

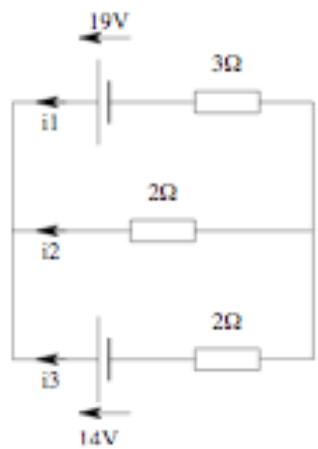
3. Calculer P.

4. Calculer les coordonnée de $\overrightarrow{x}$ et de $\overrightarrow{y}$ dans $\mathcal{B}'$. Représenter les quantités calculées sur un shéma.

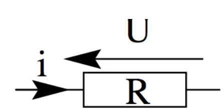
Chapitre 2

TD2 et 3 : Exemple de modèle matriciel

Exercice 4 :



On rappelle les lois de Kirchhoff : la somme (algébrique) des courants entrant en un noeud est nulle, et la somme des tensions (algébriques) le long d'une boucle du circuit est nulle. On a aussi la loi d'Ohm : $U = Ri$ aux bornes d'une résistance :



1. Soit ${}^t x = (i_1, i_2, i_3, U)$ où U est la tension au bornes du circuit ci-dessus. Trouver $A \in \mathcal{M}_{4\mathbf{x}4}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{4\mathbf{x}1}(\mathbb{R})$, tels que $Ax = b$.
2. Calculer les courants dans les branches du circuit ci-dessus.

Exercice 5 : Chaînes de Markov

Dans ce pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. S'il a fait beau un jour, il y a autant de chances qu'il neige que de chances qu'il pleuve le lendemain. S'il fait mauvais (pluie ou neige), il y a une chance sur deux que ça ne change pas le lendemain, mais si ça change, alors le changement se fait seulement une fois sur deux vers le beau temps. Soit ${}^t x_n = (b_n, p_n, n_n)$ une représentation du n^{ieme} jour. b_n représente la probabilité pour qu'il fasse beau, p_n la probabilité pour qu'il pleuve et n_n la probabilité pour qu'il neige.
1. Montrer que $x_{n+1} = Ax_n$ où A est une matrice que l'on calculera.

On note u_1, u_2 et u_3 les vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3. On a $x_0 = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$.

2. Exprimer x_n en fonction de α, β, γ, λ_1, λ_2 et λ_3.
3. Dans ce pays, quelle est la proportion de jours de beau temps, de pluie et de neige ? On pourra utiliser la commande *bdiag* de Scilab pour calculer λ_1, λ_2, λ_3, u_1, u_2 et u_3.

Exercice 6 :

Les femmes ont deux chromosomes X et les hommes ont un chromosome X et un chromosome Y. Certains gènes sont situés sur le chromosome X. C'est le cas par exemple pour un gène G lié à une forme de daltonisme. Ce gène G possède deux versions (on dit deux *allèles* en biologie), une qu'on appellera S (sain) et l'autre qu'on appellera M (malade) qui est à l'origine du daltonisme. En fait, ce gène est récessif, ce qui signifie que seules les femmes qui ont deux fois la version M du gène seront daltoniennes. Les hommes eux n'ont qu'une copie du gène G et sont daltoniens si ils ont la version M. Le but du problème est d'étudier la propagation de ce gène.

Partie I. Reproduction simple.

Soit H_n la proportion des gènes G des hommes qui sont en version M à la génération n. Soit F_n la proportion des gènes G des femmes qui sont en version M à la génération n. On note ${}^t v_n = (H_n, F_n)$. Soit

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Pourquoi a-t-on, après reproduction de la génération n, $v_{n+1} = Rv_n$?
2. En déduire une expression du vecteur v_n en fonction de v_0 et R.
3. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de R.
4. En déduire la limite de v_n quand $n \to \infty$ Que peut-on constater, à la limite, pour les proportions de gène M chez les hommes et les femmes ?
5. On prend ${}^t v_0 = (2\%, 0)$. Calculer v_∞.

Partie II. Sélection naturelle

On modélise de même la sélection naturelle par un *opérateur de sélection*. On part du principe que les hommes sont beaucoup plus atteints de daltonisme que les femmes (car M est recessif, donc pour qu'une femme soit malade, il faut qu'elle ait deux gènes M), et on fait l'hypothèse que les femmes ne sont jamais malades, et donc que la sélection naturelle ne s'applique pas sur elles. Le nombre d'hommes malades est proportionnel à H, et on peut supposer que la sélection naturelle fait passer d'une proportion H de gènes M à une proportion σH où σ (comme Sélection) est un réel entre 0 et 1, c'est un paramètre du modèle.
1. Que vaut σ pour une sélection naturelle très forte (maladie très handicapante) ? Et pour une maladie peu handicapante ?
2. Donner la matrice S de l'opérateur de sélection.
3. On suppose qu'à chaque génération, il y a d'abord reproduction puis sélection. Donner la matrice R_2 de l'opérateur qui fait passer d'une génération n à la suivante.
4. En s'inspirant de ce qui a été fait dans la question précédente, que peut-on dire du comportement de l'état de la population quand n tend vers l'infini ?
5. On a choisi de faire agir la reproduction avant la sélection. Qu'aurait donné le modèle si on avait fait le contraire ?

Partie III. Les mutations.

On introduit maintenant un nouvel opérateur de mutation M. On note μ la probabilité qu'un gène malade mute en gène sain et μ' la probabilité pour qu'une mutation inverse se produise (on suppose que ces probabilités de mutations sont les mêmes chez les hommes et chez les femmes).
1. Calculer l'opérateur de mutation. Que constatez-vous ? Pouvez-vous donner sa matrice ? Si non, écrire $M(v)$ sous la forme $Nv + k$ avec N une matrice 2x2 et k un vecteur.
2. Supposons qu'à chaque génération, il y ait d'abord mutation, puis reproduction, puis sélection naturelle. Quelle relation existe-t-il entre v_{n+1} et v_n ? Écrire cette relation sous la forme $v_{n+1} = R_3 v_n + k'$.

On est ainsi conduit à l'étude de l'itération d'une application affine. Un *truc* permet de se ramener à l'étude d'un opérateur linéaire : il s'agit d'introduire artificiellement une coordonnée supplémentaire z, telle qu'on retrouve l'opérateur précédent en faisant $z = 1$, mais de sorte que le nouvel opérateur soit linéaire (et non plus affine). Ici, on considérera : ${}^t v'_n = ({}^t v_n \ z)$ et R' une matrice 3x3 telle que $v'_{n+1} = R' v'_n$.

3. Calculer R'. On prend $\mu = \mu' = 1\%$ et $\sigma = 2\%$. A partir de l'étude des vecteurs propres et valeurs propres de R', donner le comportement de la population lorsque n tend vers l'infini.

Chapitre 3

TD4 :SVD

Exercice 7 : On considère les matrices suivantes :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

où a est un réel non nul vérifiant $a \in]-1;1[$.

1. Vérifier que les colonnes de U sont des vecteurs propres de R et calculer les valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2$ associées.

On considère la matrice suivante

$$X = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 15 & 8 \\ 5 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Chaque ligne de la matrice représente un individu et chaque colonne une variable.

2. Calculer X_c, la matrice des données centrées.

3. Calculer l'écart type de chaque variable.

4. Calculer Y, la matrice des données centrées réduites.

5. Calculer Z, la matrice des données centrées normées.

6. Calculer C, la matrice de variance-covariance d'échantillon.

7. Calculer Γ, la matrice de corrélation. Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de Γ ?

8. Calculer la SVD de Z

9. Calculer les coordonnées des projections orthogonales des individus $z_{i.}$ sur la droite $\Delta_{u_{.1}}$ dans la base $(u_{.1}, u_{.2})$.

Exercice 8 : On considère la matrice Z suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculez la décomposition en valeurs singulières de Z (on ne calculera pas les vecteurs propres associés à la valeur propre 0).

2. Vérifier que

$$Z = \sigma_1 v_{.1}{}^t u_{.1}$$

Exercice 9 : On considère la matrice

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la SVD de Z (on ne calculera pas les vecteurs propres associés à la valeur propre 0).
2. Calculer

$$\sqrt{\lambda} v_{.1}{}^t u_{.1} + \sqrt{\lambda_2} v_{.2}{}^t u_{.2}$$

et expliquer pourquoi on a ce résultat. (3 points)

Exercice 10 : On reprend les notations de l'exercice 1.
1. Calculer les coordonnées des projections orthogonales des individus $z_{i.}$ sur la droite $\Delta_{u_{.2}}$ dans la base $(u_{.1}, u_{.2})$.
2. Calculer l'inertie totale, l'inertie des projetés sur $\Delta_{u_{.1}}$, et l'inertie des projetés sur $\Delta_{u_{.2}}$. Commentaires.
3. Tracer sur un graphique dans le repère $(0, e_1, e_2)$ le nuage de individus $z_{i.}$, la droite $\Delta_{u_{.1}}$ et les projections orthogonales des individus $z_{i.}$.

Soient $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$, les valeurs propres de $Z\,{}^tZ$ classées par ordre décroissant. Pour tout $i \in [1, n]$, on note v_i un vecteur propre normé associé à la valeur propre λ_i de $Z\,{}^tZ$.
4. Combien vaut n ? $v_1, \ldots, v_n$ forment-ils une base orthonormée ? Quelles relations a-t-on entre λ_1 et λ'_1, λ_2 et λ'_2, $u_{.1}$ et v_1, $u_{.2}$ et v_2 ?
5. Calculer un vecteur propre de norme 1 lié à la valeur propre λ_1 de $Z\,{}^tZ$.
6. Calculer les coordonnées des variables dans la base $v_1, \ldots, v_n$.
7. Représenter les 2 variables dans le meilleur plan.

On cherche la droite Δ telle que :

$$\begin{cases} Min \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(M_i, H_i) \\ H_i = \text{projection orthogonale de } M_i \text{ sur } \Delta \end{cases}$$

où les M_i représentent les individus.
8. Quelle est cette droite ?

Chapitre 4

TD5-6 : ACP normée

Exercice 11 :

On considère les consommations annuelles, exprimées en francs, de 8 denrées alimentaire (les variables) de différentes catégories socio-professionnelles (les individus)

	Pain ordinaire	Autre pain	Vin ordinaire	Autre vin	Pommes de terre	Légumes secs	Raisin de table	Plats préparés
Exploitants agricoles	167	1	163	23	41	8	6	6
Salariés agricoles	162	2	141	12	40	12	4	15
Professions indépend.	119	6	69	56	39	5	13	41
Cadres supérieurs	87	11	63	111	27	3	18	39
Cadres moyens	103	5	68	77	32	4	11	30
Employés	111	4	72	66	34	6	10	28
Ouvriers	130	3	76	52	43	7	7	16
Inactifs	138	7	117	74	53	8	12	20

Résultats

```
xbar =
  127.1250    4.8750   96.1250   58.8750   38.6250    6.6250   10.1250   24.3750

s =
   26.1029    2.9765   36.2851   29.2935    7.3644    2.6428    4.1665   11.4558

Y =
    1.5276   -1.3019    1.8430   -1.2247    0.3225    0.5203   -0.9900   -1.6040
    1.3361   -0.9659    1.2367   -1.6002    0.1867    2.0338   -1.4701   -0.8184
   -0.3113    0.3780   -0.7476   -0.0981    0.0509   -0.6149    0.6900    1.4512
   -1.5372    2.0578   -0.9129    1.7794   -1.5785   -1.3717    1.8901    1.2767
   -0.9242    0.0420   -0.7751    0.6187   -0.8996   -0.9933    0.2100    0.4910
   -0.6177   -0.2940   -0.6649    0.2432   -0.6280   -0.2365   -0.0300    0.3164
    0.1101   -0.6299   -0.5546   -0.2347    0.5941    0.1419   -0.7500   -0.7311
    0.4166    0.7139    0.5753    0.5163    1.9520    0.5203    0.4500   -0.3819

Matrice de corrélation

R =
```

```
    1.0000   -0.7737    0.9262   -0.9058    0.6564    0.8886   -0.8334   -0.8558
   -0.7737    1.0000   -0.6040    0.9044   -0.3329   -0.6734    0.9588    0.7712
    0.9262   -0.6040    1.0000   -0.7502    0.5171    0.7917   -0.6690   -0.8280
   -0.9058    0.9044   -0.7502    1.0000   -0.4186   -0.8386    0.9239    0.7198
    0.6564   -0.3329    0.5171   -0.4186    1.0000    0.6029   -0.4099   -0.5540
    0.8886   -0.6734    0.7917   -0.8386    0.6029    1.0000   -0.8245   -0.7509
   -0.8334    0.9588   -0.6690    0.9239   -0.4099   -0.8245    1.0000    0.8344
   -0.8558    0.7712   -0.8280    0.7198   -0.5540   -0.7509    0.8344    1.0000

Lambda =
    6.2079    0.8797    0.4160    0.3065    0.1684    0.0181    0.0034    0.0000

U =
   -0.3913    0.1378    0.1617    0.1193   -0.2940   -0.3977   -0.1069    0.7290
    0.3487    0.4406    0.3199    0.2179    0.2654   -0.5207    0.4231   -0.1178
   -0.3492    0.2017    0.6806   -0.0289   -0.2457    0.4648    0.2539   -0.1801
    0.3736    0.2603    0.0735   -0.3965    0.3456    0.4229    0.0333    0.5750
   -0.2464    0.7438   -0.5577   -0.0740   -0.1757    0.1077    0.0934   -0.1354
   -0.3648    0.1280    0.0324    0.5189    0.6692    0.1849   -0.3131    0.0127
    0.3731    0.3260    0.2542    0.0637   -0.2715   -0.0163   -0.7659   -0.1590
    0.3617   -0.0502   -0.1617    0.7081   -0.3329    0.3602    0.2250    0.2189

V =
   -0.4784   -0.0927    0.4603   -0.3971   -0.4967   -0.0573   -0.1344    0.0000
   -0.4997   -0.1687    0.1927    0.5851    0.4253   -0.0131    0.1905   -0.0000
    0.2089    0.0221   -0.3031    0.5457   -0.6455   -0.1541   -0.0280   -0.0000
    0.6185    0.0664    0.5642    0.0097    0.2229   -0.3328   -0.0960    0.0000
    0.2438   -0.3229   -0.0957   -0.2631   -0.0344    0.3682    0.7044   -0.0000
    0.1144   -0.3048   -0.1890   -0.0441    0.1774    0.5148   -0.6594    0.0000
   -0.1276   -0.0690   -0.5359   -0.3518    0.2526   -0.6148   -0.0355    0.0000
   -0.0799    0.8696   -0.0933   -0.0845    0.0984    0.2891    0.0583   -0.0000

Psi_Y =
   -3.3716   -0.2458    0.8396   -0.6217   -0.5766   -0.0218   -0.0223    0.0000
   -3.5217   -0.4474    0.3515    0.9162    0.4937   -0.0050    0.0316   -0.0000
    1.4720    0.0585   -0.5530    0.8545   -0.7493   -0.0586   -0.0046   -0.0000
    4.3588    0.1761    1.0292    0.0152    0.2588   -0.1265   -0.0159    0.0000
    1.7181   -0.8566   -0.1746   -0.4119   -0.0399    0.1400    0.1170   -0.0000
    0.8065   -0.8085   -0.3448   -0.0691    0.2059    0.1957   -0.1095    0.0000
   -0.8991   -0.1830   -0.9777   -0.5508    0.2932   -0.2337   -0.0059    0.0000
   -0.5630    2.3068   -0.1702   -0.1323    0.1142    0.1099    0.0097   -0.0000

Phi =
   -0.9750    0.1293    0.1043    0.0661   -0.1207   -0.0535   -0.0063    0.0000
    0.8687    0.4132    0.2064    0.1206    0.1089   -0.0700    0.0248   -0.0000
   -0.8700    0.1892    0.4390   -0.0160   -0.1008    0.0625    0.0149   -0.0000
    0.9309    0.2441    0.0474   -0.2195    0.1418    0.0568    0.0020    0.0000
   -0.6139    0.6976   -0.3597   -0.0410   -0.0721    0.0145    0.0055   -0.0000
   -0.9090    0.1201    0.0209    0.2872    0.2746    0.0249   -0.0184    0.0000
    0.9295    0.3057    0.1640    0.0353   -0.1114   -0.0022   -0.0450   -0.0000
    0.9011   -0.0471   -0.1043    0.3920   -0.1366    0.0484    0.0132    0.0000
```

```
Cos^2 =
    0.8844    0.0047    0.0548    0.0301    0.0259    0.0000    0.0000    0.0000
    0.8981    0.0145    0.0089    0.0608    0.0176    0.0000    0.0001    0.0000
    0.5746    0.0009    0.0811    0.1936    0.1489    0.0009    0.0000    0.0000
    0.9418    0.0015    0.0525    0.0000    0.0033    0.0008    0.0000    0.0000
    0.7529    0.1872    0.0078    0.0433    0.0004    0.0050    0.0035    0.0000
    0.4278    0.4299    0.0782    0.0031    0.0279    0.0252    0.0079    0.0000
    0.3606    0.0149    0.4264    0.1353    0.0383    0.0244    0.0000    0.0000
    0.0555    0.9319    0.0051    0.0031    0.0023    0.0021    0.0000    0.0000

Ctr =
   22.8891    0.8586   21.1832   15.7668   24.6687    0.3283    1.8053    0.0000
   24.9729    2.8443    3.7134   34.2377   18.0849    0.0173    3.6295    0.0000
    4.3631    0.0487    9.1884   29.7819   41.6654    2.3744    0.0782    0.0000
   38.2554    0.4407   31.8307    0.0094    4.9693   11.0736    0.9209    0.0000
    5.9436   10.4277    0.9165    6.9199    0.1181   13.5596   49.6147    0.0000
    1.3098    9.2891    3.5737    0.1949    3.1475   26.4992   43.4858    0.0000
    1.6277    0.4761   28.7237   12.3757    6.3786   37.7925    0.1257    0.0000
    0.6383   75.6149    0.8705    0.7138    0.9677    8.3551    0.3399    0.0000


meilleure approximation de rang 2 de Z
    0.4545   -0.4539    0.3987   -0.4680    0.2290    0.4238   -0.4730   -0.4168
    0.4654   -0.5038    0.4029   -0.5064    0.1891    0.4340   -0.5161   -0.4424
   -0.2008    0.1906   -0.1776    0.1998   -0.1128   -0.1872    0.2009    0.1872
   -0.5945    0.5648   -0.5256    0.5920   -0.3334   -0.5542    0.5952    0.5542
   -0.2794    0.0784   -0.2732    0.1481   -0.3749   -0.2604    0.1279    0.2349
   -0.1510   -0.0265   -0.1572    0.0321   -0.2829   -0.1406    0.0132    0.1175
    0.1155   -0.1393    0.0979   -0.1356    0.0302    0.1077   -0.1397   -0.1117
    0.1903    0.2899    0.2340    0.1379    0.6557    0.1770    0.1916   -0.1130
```

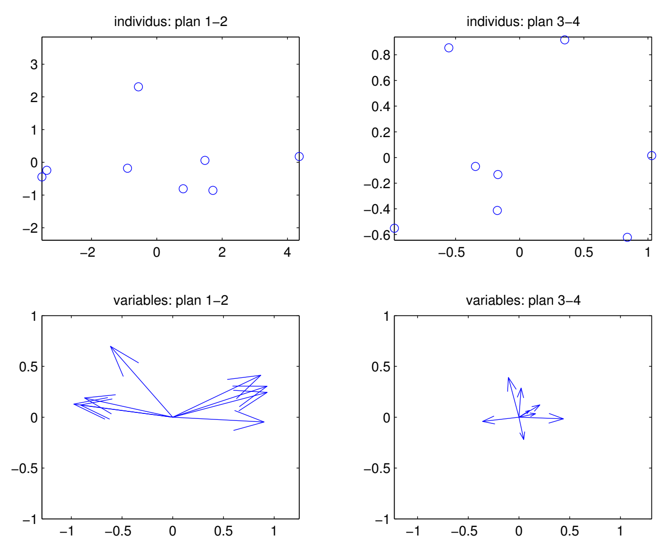


FIG. 4.0.1 – Plans 1-2 et 3-4

1. Quelle est l'inertie totale ?
2. Quels sont les pourcentages d'inertie expliquée par le plan 1-2 et par le plan 3-4 ?
3. Visualiser sur les graphiques l'individu "Inactif"
4. Visualiser sur les graphiques la variable "Pomme de terre"
5. Interpréter l'axe 1.
6. Pourquoi la dernière colonne de Phi est nulle ?
7. Calculer à partir de ψ_Y et de λ la contribution du point "Inactifs" à l'axe 2.
8. Calculer à partir de ψ_Y le $\cos^2$ du point "Inactif" sur l'axe2.
9. Le point "Ouvriers" est-il bien représenté sur le plan 1-2 ?
10. Donner en fonction de Y les coordonnées du point "salariés agricoles" dans la base $(u_{.1}, \ldots, u_{.8})$.
11. Quelles sont les valeurs propres de $\frac{1}{n} Y^t Y$?
12. Quelle est la norme de Psi_Y$_{.2}$
13. Donner la meilleure approximation de rang 2, Z^*, de Z.
14. Calculer $R^* = {}^t Z^* Z^*$ en fonction des valeurs propres λ_j et des vecteurs propres $u_{.j}$
15. Quels sont les valeurs propres non nulles de R^* et les vecteurs propres associés
16. Donner

$$\sum_i \sum_j (z_{ij} - z_{ij}^*)^2$$

Exercice 12 : Les caractéristiques de saveur pour 8 variétés de pommes ont été établies par un panel d'experts. Les 6 principales caractéristiques ont été notées sur une échelle de 1 à 100 et les résultats sont exprimés comme étant la moyenne des notes données par les experts (voir la table 4.0.1)

Variety	juicy/juteux	hard/dur	sweet/doux, sucré	acidic/acide	bitter/amer	zesty/piquant
Splendour	26.00	51.42	33.88	17.62	19.17	23.29
Granny Smith	36.21	57.00	27.37	31.50	16.21	44.88
Top Red	36.17	47.46	29.96	19.87	15.46	27.83
Celeste	26.29	22.13	30.08	21.58	5.71	21.54
Golden	22.00	18.50	38.96	9.17	9.33	14.96
Royal Gala	28.33	35.92	26.83	15.50	9.58	20.29
Fuji	37.88	50.46	41.58	16.75	8.25	33.42
Braeburn	43.04	59.37	25.96	41.58	7.33	43.96

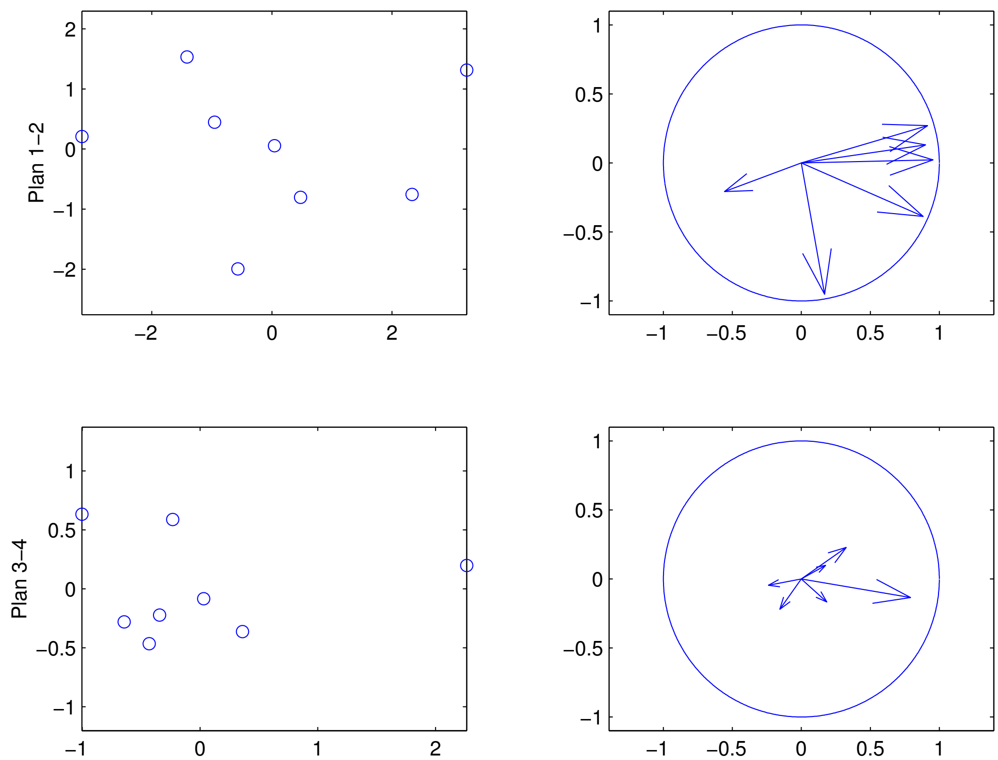
TAB. 4.0.1 – Données

On réalise sur ces données une ACP normée. On donne les résultats suivants.

```
Matrice de correlation
R =
    1.0000    0.8062   -0.3007    0.7599   -0.0522    0.8873
    0.8062    1.0000   -0.2839    0.6614    0.4575    0.8356
   -0.3007   -0.2839    1.0000   -0.6541   -0.0789   -0.3747
    0.7599    0.6614   -0.6541    1.0000   -0.0556    0.8680
   -0.0522    0.4575   -0.0789   -0.0556    1.0000    0.1053
    0.8873    0.8356   -0.3747    0.8680    0.1053    1.0000

Lambda =
    3.6788    1.1896    0.8792    0.1586    0.0601    0.0337

U =
```

```
    0.4697    0.1200    0.3470    0.5740    0.3096    0.4682
    0.4602   -0.3554    0.1870    0.2494   -0.6422   -0.3903
   -0.2903   -0.1902    0.8444   -0.3377   -0.1102    0.2011
    0.4773    0.2477   -0.1668   -0.5527   -0.3606    0.4975
    0.0876   -0.8726   -0.2552   -0.1158    0.2386    0.3091
    0.4978    0.0206    0.1968   -0.4188    0.5410   -0.4949

V =
   -0.1043   -0.6465   -0.1293   -0.1981   -0.6045    0.0228
    0.4303   -0.2447   -0.1625   -0.4134    0.5466   -0.3655
    0.0879   -0.2610   -0.0876    0.5214    0.3664    0.6132
   -0.2606    0.4967   -0.2431   -0.2492    0.0261    0.1038
   -0.5832    0.0673    0.1358   -0.3228    0.1692    0.1930
   -0.1757    0.1443   -0.3783    0.5616   -0.0941   -0.5605
    0.0079    0.0176    0.8535    0.1751   -0.0057   -0.2561
    0.5977    0.4262    0.0115   -0.0745   -0.4040    0.2492

Psi^Y =
   -0.5657   -1.9946   -0.3430   -0.2232   -0.4192    0.0118
    2.3344   -0.7548   -0.4310   -0.4657    0.3790   -0.1897
    0.4769   -0.8050   -0.2323    0.5874    0.2541    0.3182
   -1.4136    1.5324   -0.6446   -0.2808    0.0181    0.0539
   -3.1641    0.2077    0.3603   -0.3637    0.1173    0.1001
   -0.9531    0.4451   -1.0033    0.6327   -0.0652   -0.2908
    0.0427    0.0544    2.2635    0.1973   -0.0039   -0.1329
    3.2424    1.3147    0.0304   -0.0840   -0.2802    0.1293

Phi =
    0.9009    0.1309    0.3254    0.2286    0.0759    0.0859
    0.8827   -0.3876    0.1754    0.0993   -0.1574   -0.0716
   -0.5567   -0.2074    0.7917   -0.1345   -0.0270    0.0369
    0.9154    0.2701   -0.1564   -0.2201   -0.0884    0.0913
    0.1681   -0.9517   -0.2393   -0.0461    0.0585    0.0567
    0.9549    0.0225    0.1846   -0.1668    0.1326   -0.0908

Cos^2 =
    0.0689    0.8571    0.0253    0.0107    0.0379    0.0000
    0.8255    0.0863    0.0281    0.0329    0.0218    0.0054
    0.1579    0.4499    0.0375    0.2396    0.0448    0.0703
    0.4125    0.4848    0.0858    0.0163    0.0001    0.0006
    0.9682    0.0042    0.0126    0.0128    0.0013    0.0010
    0.3491    0.0761    0.3868    0.1538    0.0016    0.0325
    0.0004    0.0006    0.9882    0.0075    0.0000    0.0034
    0.8516    0.1400    0.0001    0.0006    0.0064    0.0014

Ctr =
    1.0874   41.8021    1.6723    3.9250   36.5473    0.0521
   18.5165    5.9859    2.6415   17.0920   29.8815   13.3582
    0.7728    6.8096    0.7669   27.1899   13.4273   37.6070
    6.7899   24.6745    5.9079    6.2111    0.0683    1.0782
   34.0178    0.4532    1.8452   10.4221    2.8615    3.7249
```

3.0865	2.0820	14.3113	31.5388	0.8855	31.4108
0.0062	0.0311	72.8416	3.0657	0.0032	6.5605
35.7230	18.1615	0.0132	0.5555	16.3254	6.2083



Questions

1. Quel est l'inertie expliquée par le plan 1-2 ? On donnera l'inertie absolue et relative.

2. Interpréter les résultats (variables et individus).

3. Calculer la qualité de la représentation du point 'Top Red' sur le plan 1-2.

4. Retrouver à l'aide de la matrice ψ^Y l'inertie de l'axe 1.

5. Donner la contribution de la variété 'Top Red' à l'axe 1.

Exercice 13 :

Données

Le tableau suivant donne, pour 15 villes de France les moyennes des températures mensuelles calculées sur 30 ans (entre 1931 et 1960). Les quatre colonnes supplémentaires sont la latitude, la longitude, la moyenne des températures des 12 mois et l'amplitude thermique (température mensuelle maximale – température mensuel minimale).

Villes : mois	janv.	fév.	mars	avril	mai	juin	juil.	aout	sept.	oct.	nov.	déc.	lati	long	moy	ampli
Bordeaux	5.6	6.6	10.3	12.8	15.8	19.3	20.9	21.0	18.6	13.8	9.1	6.2	44.5	-0.34	13.33	15.4
Brest	6.1	5.8	7.8	9.2	11.6	14.4	15.6	16.0	14.7	12.0	9.0	7.0	48.24	-4.29	10.77	10.2
Clermont	2.6	3.7	7.5	10.3	13.8	17.3	19.4	19.1	16.2	11.2	6.6	3.6	45.47	3.05	10.94	16.8
Grenoble	1.5	3.2	7.7	10.6	14.5	17.8	20.1	19.5	16.7	11.4	6.5	2.3	45.1	5.43	10.98	18.6
Lille	2.4	2.9	6.0	8.9	12.4	15.3	17.1	17.1	14.7	10.4	6.1	3.5	50.38	3.04	9.73	14.7
Lyon	2.1	3.3	7.7	10.9	14.9	18.5	20.7	20.1	16.9	11.4	6.7	3.1	45.45	4.51	11.36	18.6
Marseille	5.5	6.6	10.0	13.0	16.8	20.8	23.3	22.8	19.9	15.0	10.2	6.9	43.18	5.24	14.23	17.8
Montpellier	5.6	6.7	9.9	12.8	16.2	20.1	22.7	22.3	19.3	14.6	10.0	6.5	43.36	3.53	13.89	17.1
Nantes	5.0	5.3	8.4	10.8	13.9	17.2	18.8	18.6	16.4	12.2	8.2	5.5	47.13	-1.33	11.69	13.8
Nice	7.5	8.5	10.8	13.3	16.7	20.1	22.7	22.5	20.3	16.0	11.5	8.2	43.42	7.15	14.84	15.2
Paris	3.4	4.1	7.6	10.7	14.3	17.5	19.1	18.7	16.0	11.4	7.1	4.3	48.52	2.2	11.18	15.7
Rennes	4.8	5.3	7.9	10.1	13.1	16.2	17.9	17.8	15.7	11.6	7.8	5.4	48.05	-1.41	11.13	13.1
Strasbourg	0.4	1.5	5.6	9.8	14.0	17.2	19.0	18.3	15.1	9.5	4.9	1.3	48.35	7.45	9.72	18.6
Toulouse	4.7	5.6	9.2	11.6	14.9	18.7	20.9	20.9	18.3	13.3	8.6	5.5	43.36	1.26	12.68	16.2
Vichy	2.4	3.4	7.1	9.9	13.6	17.1	19.3	18.8	16.0	11.0	6.6	3.4	46.08	3.26	10.72	16.9

On a effectué sur ces données une Analyse en Composantes Principales normée sur les 12 premières variables. Les quatres variables seront des variables supplémentaires.

Résultats

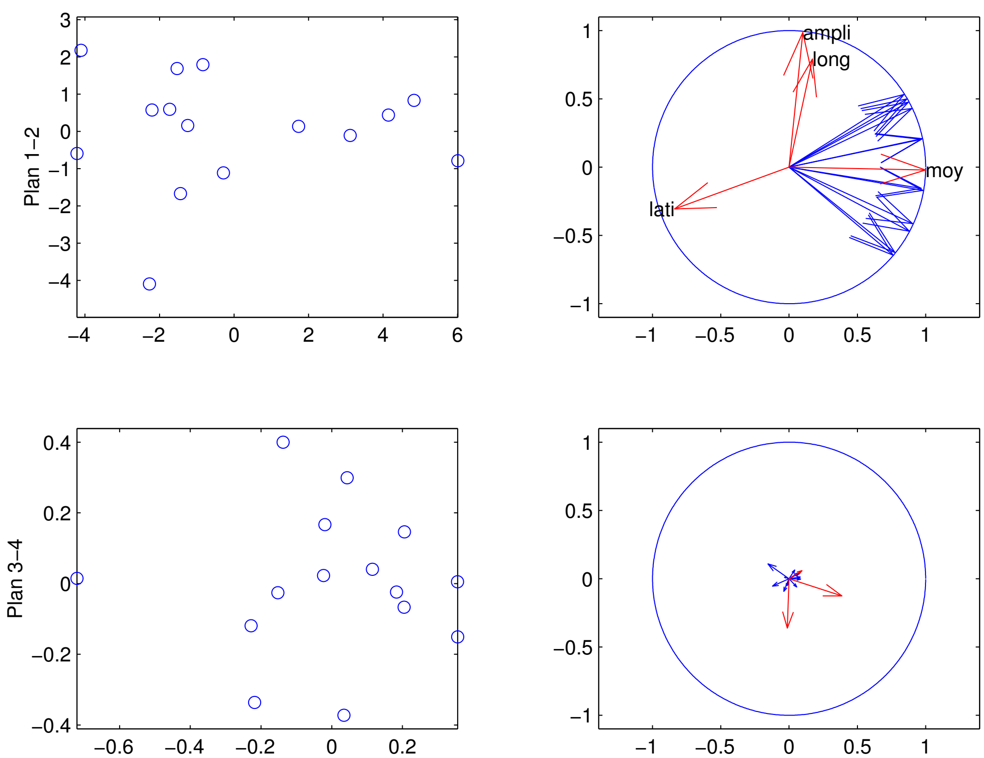
```
Lambda =
  Columns 1 through 7
     9.5818    2.2764    0.0700    0.0397    0.0140    0.0080    0.0060
   Columns 8 through 12
     0.0017    0.0015    0.0005    0.0003    0.0000
U =
  Columns 1 through 7
    0.2459   -0.4271    0.0809    0.2560    0.2655   -0.2848    0.0938
    0.2844   -0.3109    0.1268   -0.0585   -0.0450   -0.5358    0.3839
    0.3130   -0.1034    0.5833   -0.5483    0.1050    0.3698    0.0790
    0.3131    0.1350    0.4601    0.2715   -0.1262   -0.0390   -0.1946
    0.2820    0.3146    0.1457    0.4648   -0.4069   -0.0856   -0.0155
    0.2790    0.3310    0.0469    0.2453    0.2986    0.3332    0.0704
    0.2719    0.3522   -0.3104   -0.0591    0.2202   -0.0169    0.5404
    0.2903    0.2850   -0.2326   -0.2017    0.3289   -0.1736   -0.1820
    0.3147    0.1379   -0.1559   -0.3216   -0.0673   -0.3148   -0.3765
    0.3166   -0.1130   -0.2804   -0.2012   -0.4047    0.0524   -0.3028
    0.2920   -0.2743   -0.3216    0.0151   -0.4072    0.4164    0.3334
    0.2502   -0.4138   -0.2127    0.3035    0.3937    0.2636   -0.3533
  Columns 8 through 12
   -0.1686    0.5510    0.4291   -0.0916   -0.0092
    0.1413   -0.3565   -0.3076    0.2169    0.2788
    0.2297    0.0221    0.1241   -0.1655   -0.0186
   -0.5827   -0.2486   -0.0958    0.0958   -0.3513
    0.5026    0.0380    0.1176   -0.3665    0.0942
    0.0053    0.2463   -0.1602    0.5116    0.4438
    0.0741   -0.1488    0.2501    0.0841   -0.5140
   -0.3061   -0.1882    0.0199   -0.5269    0.4016
    0.1674    0.4549   -0.4056    0.1225   -0.3071
   -0.0327   -0.1890    0.5457    0.3834    0.1673
   -0.2845    0.1809   -0.3300   -0.2494    0.0265
    0.3123   -0.3346   -0.1516   -0.0551   -0.2100
Psi^Y =
```

```
  Columns 1 through 7
    3.1207   -0.1093    0.7208   -0.0147   -0.0078   -0.0046   -0.1250
   -2.2680   -4.0933   -0.1149   -0.0406   -0.0977    0.1530   -0.0084
   -1.7259    0.5925    0.0191   -0.1669    0.1476   -0.0313    0.0017
   -1.5293    1.6879    0.1375   -0.3997   -0.2831    0.0464    0.0533
   -4.2168   -0.5952   -0.3559   -0.0049   -0.0388   -0.0975   -0.1660
   -0.8349    1.7882    0.0230   -0.0226    0.0555    0.0966    0.0333
    4.8327    0.8288   -0.3566    0.1506    0.0436    0.1451   -0.0620
    4.1473    0.4354   -0.1833    0.0238    0.0424    0.0221    0.0858
   -0.2813   -1.1146    0.2282    0.1191    0.0451    0.0182    0.0570
    6.0070   -0.7893   -0.2048    0.0669   -0.1856   -0.1670    0.0324
   -1.2419    0.1563    0.2182    0.3363    0.0026    0.0515    0.0082
   -1.4387   -1.6711    0.1523    0.0256    0.1031   -0.1279    0.1192
   -4.1056    2.1723   -0.0346    0.3722   -0.0898   -0.0560   -0.0121
    1.7362    0.1361   -0.0434   -0.2992    0.1551   -0.0492   -0.0907
   -2.2015    0.5752    0.2057    0.1461    0.1079   -0.0007    0.0734
  Columns 8 through 12
   -0.0122   -0.0230   -0.0160   -0.0007   -0.0045
   -0.0269    0.0022   -0.0239   -0.0086    0.0006
    0.0015   -0.0676    0.0000    0.0035   -0.0028
    0.0120   -0.0075    0.0084    0.0152    0.0023
    0.0011   -0.0261    0.0323   -0.0045   -0.0025
    0.0254    0.0275    0.0025   -0.0506   -0.0031
    0.0536   -0.0074   -0.0142    0.0242   -0.0016
   -0.1123   -0.0474    0.0173   -0.0034    0.0012
   -0.0110    0.0754    0.0463    0.0191   -0.0056
    0.0352    0.0136   -0.0012   -0.0149   -0.0012
    0.0455   -0.0328    0.0270   -0.0025    0.0103
    0.0353   -0.0202   -0.0232    0.0041    0.0018
   -0.0551    0.0332   -0.0365    0.0076   -0.0001
   -0.0218    0.0702   -0.0068    0.0006    0.0092
    0.0296    0.0100   -0.0119    0.0110   -0.0039
Phi =
  Columns 1 through 7
    0.7612   -0.6443    0.0214    0.0510    0.0315   -0.0254    0.0073
    0.8805   -0.4691    0.0336   -0.0117   -0.0053   -0.0479    0.0299
    0.9688   -0.1560    0.1544   -0.1092    0.0124    0.0330    0.0061
    0.9693    0.2037    0.1217    0.0541   -0.0150   -0.0035   -0.0151
    0.8728    0.4747    0.0386    0.0926   -0.0482   -0.0076   -0.0012
    0.8636    0.4993    0.0124    0.0489    0.0354    0.0298    0.0055
    0.8415    0.5314   -0.0821   -0.0118    0.0261   -0.0015    0.0420
    0.8986    0.4299   -0.0615   -0.0402    0.0390   -0.0155   -0.0142
    0.9740    0.2081   -0.0412   -0.0641   -0.0080   -0.0281   -0.0293
    0.9802   -0.1705   -0.0742   -0.0401   -0.0480    0.0047   -0.0236
    0.9038   -0.4139   -0.0851    0.0030   -0.0483    0.0372    0.0259
    0.7743   -0.6243   -0.0563    0.0605    0.0467    0.0235   -0.0275
  Columns 8 through 12
   -0.0070    0.0213    0.0095   -0.0015    0.0000
    0.0059   -0.0138   -0.0068    0.0037    0.0012
    0.0096    0.0009    0.0028   -0.0028   -0.0001
   -0.0244   -0.0096   -0.0021    0.0016   -0.0016
```

```
    0.0210    0.0015    0.0026   -0.0062    0.0004
    0.0002    0.0095   -0.0036    0.0086    0.0020
    0.0031   -0.0057    0.0055    0.0014   -0.0023
   -0.0128   -0.0073    0.0004   -0.0089    0.0018
    0.0070    0.0176   -0.0090    0.0021   -0.0014
   -0.0014   -0.0073    0.0121    0.0065    0.0007
   -0.0119    0.0070   -0.0073   -0.0042    0.0001
    0.0131   -0.0129   -0.0034   -0.0009   -0.0009

Cos^2 =
  Columns 1 through 7
    0.9467    0.0012    0.0505    0.0000    0.0000    0.0000    0.0015
    0.2344    0.7634    0.0006    0.0001    0.0004    0.0011    0.0000
    0.8799    0.1037    0.0001    0.0082    0.0064    0.0003    0.0000
    0.4289    0.5226    0.0035    0.0293    0.0147    0.0004    0.0005
    0.9715    0.0194    0.0069    0.0000    0.0001    0.0005    0.0015
    0.1781    0.8171    0.0001    0.0001    0.0008    0.0024    0.0003
    0.9642    0.0284    0.0052    0.0009    0.0001    0.0009    0.0002
    0.9858    0.0109    0.0019    0.0000    0.0001    0.0000    0.0004
    0.0565    0.8863    0.0372    0.0101    0.0014    0.0002    0.0023
    0.9801    0.0169    0.0011    0.0001    0.0009    0.0008    0.0000
    0.8894    0.0141    0.0275    0.0652    0.0000    0.0015    0.0000
    0.4199    0.5665    0.0047    0.0001    0.0022    0.0033    0.0029
    0.7757    0.2171    0.0001    0.0064    0.0004    0.0001    0.0000
    0.9526    0.0059    0.0006    0.0283    0.0076    0.0008    0.0026
    0.9215    0.0629    0.0080    0.0041    0.0022    0.0000    0.0010
  Columns 8 through 12
    0.0000    0.0001    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0013    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    0.0001    0.0000    0.0000
    0.0002    0.0002    0.0000    0.0007    0.0000
    0.0001    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0007    0.0001    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0001    0.0041    0.0015    0.0003    0.0000
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0012    0.0006    0.0004    0.0000    0.0001
    0.0003    0.0001    0.0001    0.0000    0.0000
    0.0001    0.0001    0.0001    0.0000    0.0000
    0.0002    0.0016    0.0000    0.0000    0.0000
    0.0002    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

Ctr =
  Columns 1 through 7
    6.7759    0.0350   49.4758    0.0362    0.0292    0.0178   17.2292
    3.5789   49.0688    1.2567    0.2770    4.5321   19.5489    0.0783
    2.0726    1.0282    0.0348    4.6781   10.3355    0.8202    0.0033
    1.6271    8.3440    1.7999   26.8498   38.0283    1.7965    3.1346
   12.3718    1.0375   12.0596    0.0041    0.7152    7.9371   30.3545
    0.4850    9.3649    0.0503    0.0861    1.4631    7.7887    1.2193
```

```
   16.2497    2.0117   12.1072    3.8130    0.9030   17.5893    4.2403
   11.9672    0.5551    3.1977    0.0956    0.8519    0.4087    8.1155
    0.0551    3.6380    4.9580    2.3828    0.9641    0.2764    3.5841
   25.1063    1.8245    3.9942    0.7524   16.3574   23.2972    1.1538
    1.0732    0.0716    4.5331   19.0075    0.0032    2.2116    0.0739
    1.4400    8.1785    2.2091    0.1101    5.0469   13.6663   15.6501
   11.7278   13.8190    0.1138   23.2842    3.8269    2.6212    0.1618
    2.0972    0.0543    0.1791   15.0378   11.4136    2.0197    9.0645
    3.3721    0.9690    4.0306    3.5853    5.5298    0.0005    5.9369
  Columns 8 through 12
    0.5661    2.3680    3.4785    0.0125    6.8471
    2.7701    0.0226    7.7256    1.7383    0.1234
    0.0092   20.4169    0.0000    0.2912    2.7327
    0.5455    0.2495    0.9615    5.3723    1.8112
    0.0048    3.0502   14.0935    0.4793    2.0265
    2.4691    3.3678    0.0820   59.7532    3.2101
   10.9457    0.2435    2.7455   13.6219    0.8750
   48.1099   10.0323    4.0730    0.2670    0.4902
    0.4576   25.3688   29.0078    8.5411   10.7506
    4.7393    0.8222    0.0199    5.1834    0.5056
    7.9031    4.8106    9.8979    0.1499   35.8755
    4.7476    1.8313    7.3015    0.3905    1.0744
   11.5782    4.9294   18.0683    1.3436    0.0046
    1.8128   22.0427    0.6344    0.0082   28.4708
    3.3409    0.4442    1.9105    2.8478    5.2023

Variables supplementaires

Moyennes =
   46.0393    2.5833   11.8127   15.9133

Ecarts types =
    2.2170    3.2056    1.5474    2.2476

SuppZ =
   -0.1793   -0.2355    0.2532   -0.0590
    0.2563   -0.5536   -0.1740   -0.6563
   -0.0663    0.0376   -0.1456    0.1019
   -0.1094    0.2293   -0.1389    0.3086
    0.5055    0.0368   -0.3475   -0.1394
   -0.0686    0.1552   -0.0755    0.3086
   -0.3330    0.2140    0.4034    0.2167
   -0.3120    0.0762    0.3466    0.1363
    0.1270   -0.3152   -0.0205   -0.2428
   -0.3051    0.3678    0.5051   -0.0819
    0.2889   -0.0309   -0.1056   -0.0245
    0.2342   -0.3216   -0.1139   -0.3232
    0.2691    0.3920   -0.3492    0.3086
   -0.3120   -0.1066    0.1447    0.0329
    0.0047    0.0545   -0.1823    0.1133
```

```
Phi_Supp =
  Columns 1 through 7
   -0.8389   -0.3065   -0.0126   -0.3619   -0.0837    0.1030   -0.0829
    0.1715    0.7922    0.3872   -0.1253   -0.3164    0.2147    0.0099
    0.9997   -0.0214    0.0098   -0.0025    0.0040    0.0005    0.0017
    0.1011    0.9857    0.0946    0.0592   -0.0206   -0.0560    0.0251
  Columns 8 through 12
    0.0697   -0.0639   -0.1416   -0.0103    0.0097
    0.0833   -0.0477    0.0450   -0.0578   -0.0275
   -0.0001    0.0006    0.0005   -0.0005   -0.0005
   -0.0053   -0.0242    0.0276   -0.0081   -0.0022
```



Questions

1. Quelle est l'inertie totale et pourquoi ?
2. Quelle est la part d'inertie expliquée par le plan 1-2.
3. Est-il utile pour vous d'interpréter l'axe 3 ?
4. Interpréter les axes 1 et 2.
5. Interpréter le graphe de points.
6. Expliquez comment sont calculées les coordonnées des projections des variables supplémentaires `lati`, `long`, `moy`, `ampli`.
7. En partant de la définition de l'inertie d'un axe j démontrer que son inertie est donné par la $jème$ valeur propre de la matrice de corrélation.

Exercice 14 :

On considère les compositions chimiques des 20 eaux minérales suivantes [1] :

Origines	HCO_3^-	SO_4^-	Cl^-	Ca^+	Mg^+	Na^+
Aix-les-Bains	341	27	3	84	23	2
Beckerish	263	23	9	91	5	3
Cayranne	287	3	5	44	24	23
Chambon	298	9	23	96	6	11
Cristal-Roc	200	15	8	70	2	4
St Cyr	250	5	20	71	6	11
Evian	357	10	2	78	24	5
Ferita	311	14	18	73	18	13
St Hyppolite	256	6	23	86	3	18
Laurier	186	10	16	64	4	9
Ogeu	183	16	44	48	11	31
Ondine	398	218	15	157	35	8
Perrier	348	51	31	140	4	14
Ribes	168	24	8	55	5	9
Spa	110	65	5	4	1	3
Thonon	332	14	8	103	16	5
Veri	196	18	6	58	6	13
Viladreau	59	7	6	16	2	9
Vittel	402	306	15	202	36	3
Volvic	64	7	8	10	6	8

Résultats

On a réalisé 2 ACP normées (i.e. sur les données centrées réduites) sur ces données. La première avec l'ensemble de toutes les données et la deuxième sans le point Cayranne. On a utilisé les notations suivantes :
xbar = moyenne des variables
s = écarts types des variables
R = Matrice de corrélations
Lambda matrice diagonale et U matrice orthogonale telles que : R=U Lambda^{t}U

Résultats avec toutes les données

```
xbar = 250.4500   42.4000   13.6500   77.5000   11.8500   10.1000

s = 100.0157   75.9970   10.3212   46.8706   10.8133    7.1337

R =
    1.0000    0.4780    0.1218    0.8517    0.7306   -0.1088
    0.4780    1.0000    0.0449    0.7326    0.6706   -0.2788
    0.1218    0.0449    1.0000    0.2520   -0.1255    0.6680
    0.8517    0.7326    0.2520    1.0000    0.6057   -0.1962
    0.7306    0.6706   -0.1255    0.6057    1.0000   -0.0906
   -0.1088   -0.2788    0.6680   -0.1962   -0.0906    1.0000

Lambda =
    3.0941         0         0         0         0         0
```

[1] Les données proviennent de l'ouvrage de R. Tomassone, C. Dervin, J.P. Masson, " Biométrie, modélisation de phénomènes biologiques", page114.

```
         0    1.6876         0         0         0         0
         0         0    0.5965         0         0         0
         0         0         0    0.5028         0         0
         0         0         0         0    0.0932         0
         0         0         0         0         0    0.0258

U =
   -0.4980    0.1098   -0.2433    0.5782    0.0040   -0.5886
   -0.4717   -0.0466    0.3476   -0.6746    0.1654   -0.4148
   -0.0253    0.7207    0.3902    0.0214   -0.5720    0.0118
   -0.5239    0.1280    0.3228    0.2628    0.4267    0.5948
   -0.4813   -0.0357   -0.6013   -0.2964   -0.4377    0.3550
    0.1505    0.6699   -0.4494   -0.2308    0.5213   -0.0398

Psi_Y =
   -1.0691   -1.4144   -0.7583    0.6309   -0.4238    0.0326
    0.0735   -0.9062    0.6262    0.7283    0.0972    0.0127
    0.1896    0.5401   -2.3152   -0.3951    0.5410   -0.1082
    0.0202    0.8799    0.4811    0.8257   -0.1180   -0.0491
    0.8287   -0.9939    0.6642    0.3652    0.1361    0.0555
    0.5709    0.5519    0.2939    0.4374   -0.1900   -0.0655
   -0.9549   -1.1942   -1.1987    0.7141   -0.2806   -0.0299
   -0.2981    0.6274   -0.6684    0.3235   -0.3784   -0.0677
    0.6410    1.4755    0.2265    0.4093    0.4158   -0.0500
    0.9934   -0.0011    0.5103    0.0950   -0.0889    0.1360
    1.2339    3.9461   -0.2819   -0.9108   -0.4488    0.0570
   -3.7914    0.0921   -0.1123   -0.8239   -0.0534   -0.0447
   -0.8486    1.8761    1.0792    0.9630    0.2329   -0.0875
    1.0718   -0.6159    0.1981   -0.2278    0.2618    0.0749
    1.7350   -1.6037    0.6625   -0.9154   -0.2259   -0.5560
   -0.7933   -0.7105   -0.2757    0.9060   -0.0540    0.1569
    0.9809   -0.3406   -0.2600   -0.1568    0.6398   -0.0108
    2.2945   -0.9614    0.2081   -0.8476    0.0977    0.2135
   -5.0106   -0.3074    0.8497   -1.1953    0.1422    0.0832
    2.1326   -0.9398    0.0708   -0.9255   -0.3026    0.2471

Phi =
   -0.8760    0.1427   -0.1879    0.4100    0.0012   -0.0945
   -0.8297   -0.0605    0.2685   -0.4784    0.0505   -0.0666
   -0.0445    0.9362    0.3013    0.0152   -0.1747    0.0019
   -0.9216    0.1663    0.2493    0.1863    0.1303    0.0955
   -0.8467   -0.0464   -0.4644   -0.2102   -0.1336    0.0570
    0.2648    0.8702   -0.3471   -0.1636    0.1592   -0.0064
```

Résultats sans l'individu 3

```
Lambdamoins_ind3 =
    3.1976         0         0         0         0         0
         0    1.8559         0         0         0         0
         0         0    0.5147         0         0         0
```

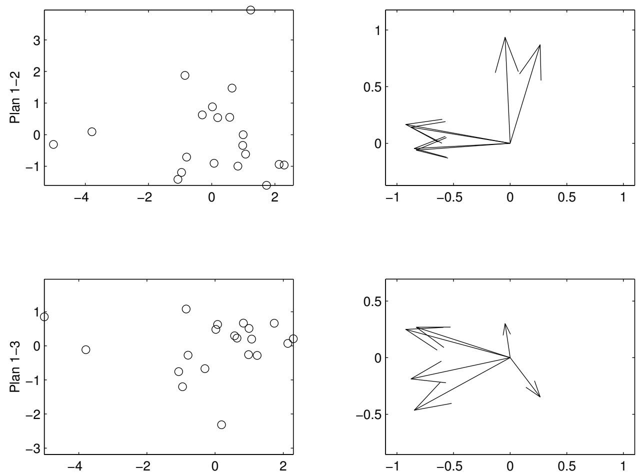


FIG. 4.0.2 – Plans 1-2 et 1-3

```
        0         0         0    0.3419         0         0
        0         0         0         0    0.0659         0
        0         0         0         0         0    0.0240

Umoins_ind3 =
  -0.4905   -0.1127    0.6175    0.0781   -0.0561    0.5968
  -0.4661    0.0148   -0.7355   -0.2554    0.0418    0.4180
  -0.0065   -0.7172   -0.0442   -0.2174   -0.6481   -0.1276
  -0.5163   -0.1537    0.1882   -0.4418    0.4192   -0.5509
  -0.4963    0.0363   -0.1578    0.7478   -0.2053   -0.3550
   0.1710   -0.6691   -0.1248    0.3563    0.5976    0.1528

U'*Umoins_ind3=
   0.9994    0.0296   -0.0009    0.0122   -0.0062   -0.0087
   0.0293   -0.9992    0.0164    0.0192   -0.0139   -0.0013
   0.0097   -0.0180   -0.2114   -0.9450   -0.2345   -0.0827
   0.0027    0.0127    0.9772   -0.2073   -0.0414   -0.0145
   0.0108   -0.0181   -0.0096   -0.2477    0.9577    0.1445
  -0.0081   -0.0002    0.0020    0.0459    0.1607   -0.9859
```

Le ' indique la transposée dans l'expression ci-dessus.

1. Sur les résultats avec toutes les données :
- Quel est le pourcentage d'information expliquée par le plan 1-2 en terme d'inertie.
- Dans le plan 1-2 les variables semblent être à l'intérieur du cercle de rayon 1, est-ce toujours et cas et pourquoi ?

2. Sur les deux ACP
- Donner sans calcul les valeurs des produits scalaires :

$$(u_{.3}|umoins\_ind3_{.3}), (u_{.3}|umoins\_ind3_{.4}), (u_{.4}|umoins\_ind3_{.3}), (u_{.4}|umoins\_ind3_{.4}).$$

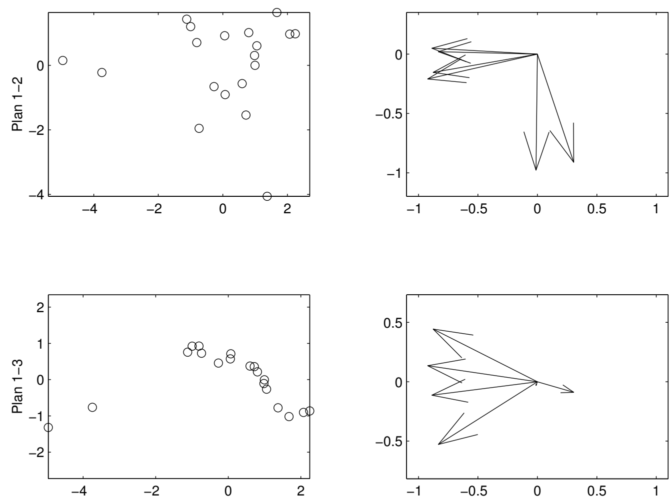


FIG. 4.0.3 – Sans l'individu 3 Plans 1-2 et 1-3

– Commentaires.

3. Interpréter les résultats